

Capítulo 5

EL EQUILIBRIO DE LOS FLUIDOS

5.1 El modelo de fluidos ideales

En términos cualitativos un fluido es todo material deformable que adquiere la forma del recipiente que lo contiene. Los líquidos y los gases están comprendidos en esta categoría, los primeros pueden estar confinados por un contenedor abierto a la atmósfera, los segundos generalmente precisan de un recipiente cerrado. Más precisamente se entiende por fluido un material que en estado de reposo no puede sostener esfuerzos de cizalla. Bajo la acción de este tipo de esfuerzos, aún mínimos, el cuerpo necesariamente fluye. En esto se diferencian de los sólidos elásticos, los cuales en estado de equilibrio pueden mantener sin dificultad esfuerzos que yacen en el plano de cualquier corte. La ley de Pascal para la presión de un fluido en reposo expresa esta propiedad (ver comentarios asociados a, 2.10, 2.20, 2.66)

$$\vec{\sigma}_{(n)} = -p \vec{n}, \quad \sigma_{ik} = -p \delta_{ik}. \quad (5.1)$$

Como ya hemos mencionado, Euler emplea esta propiedad, bien comprobada experimentalmente, que caracteriza la hidrostática y la asume como hipótesis válida también para los fluidos en movimiento. De esta manera construye un modelo, llamado de fluidos ideales, cuyas ecuaciones en un sistema de referencia inercial, las dos primeras iguales en notación indicial o vectorial, son

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + F_i, \\ \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \bullet \text{grad}) \vec{v} \right) &= -\text{grad}(p) + \vec{F} \\ \frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div}(\vec{v}) &= 0. \end{aligned} \quad (5.2)$$

como hemos visto en 2.67, 2.66, y 1.84. Aunque el modelo ignora un aspecto fundamental de los fluidos, la viscosidad y todas sus importantes consecuencias, conserva sin embargo algunos aspectos básicos del comportamiento de cualquier fluido y el conocimiento de sus propiedades está ampliamente justificado por la experiencia en esta disciplina. Hay muchos resultados de este modelo, relativamente más simple que el tratamiento de los fluidos viscosos, que son útiles y correctos dentro de una aproximación tolerable. En muchas circunstancias hay propiedades que dependen esencialmente de balances de cantidad de movimiento y energía en los cuales la viscosidad juega un papel menor. El principiante obtiene gran beneficio de la visión heurística que ofrece el modelo de fluidos ideales, mientras vaya aprendiendo también que en determinadas configuraciones no se podrá omitir el efecto directo o indirecto producido por la viscosidad, aunque esta sea muy tenue. Este capítulo está dedicado a estudiar algunas propiedades de este modelo, limitadamente al caso de fluidos en reposo. En el capítulo siguiente estudiaremos la familia de movimientos irrotacionales. En otro capítulo se tratarán los movimientos con vorticidad.

Debido a las dificultades de la teoría basada en el sistema de ecuaciones 5.2, el estudio se suele dividir en dos grandes dominios, los fluidos *incompresibles*,

$$\text{div}(\vec{v}) = 0, \quad (5.3)$$

y los fluidos *compresibles*. Los primeros, recordando la discusión asociada a las ecuaciones 1.85, 1.86, tienen densidad constante sobre las trayectorias de los elementos materiales y para ellos la ecuación de continuidad se simplifica debido a la condición 5.3 que debe cumplir el campo de velocidad.

El tratamiento de los fluidos incompresibles a su vez se subdivide en dos amplias áreas. Los fluidos con *densidad uniforme*, en los cuales ρ es una constante con valor fijo en todos los puntos del material y los fluidos con *densidad no uniforme*, o *estratificada*, en los cuales $\rho = \rho(\vec{x}, t)$ y debe cumplir la ecuación

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \bullet \text{grad}(\rho) = 0, \quad (5.4)$$

(ver 1.86). El estudio de los fluidos incompresibles no homogéneos es considerablemente más complejo que el de los fluidos con densidad constante. Es un ramo especializada de la mecánica de fluidos cuyas aplicaciones son de gran importancia para la geofísica. En estas notas nos limitamos al estudio de movimientos con densidad uniforme en la mayoría de los casos.

El dominio de los flujos compresibles está asociado generalmente con el tratamiento de problemas de altas velocidades. Se verá durante el tratamiento del tema que la compresibilidad del fluido es un efecto menor cuando las velocidades del flujo son muy inferiores a la velocidad del sonido en el medio y por el contrario es un efecto de gran importancia para velocidades del flujo sónicas o suprsónicas. Naturalmente, en el caso de los fluidos compresibles, $\text{div}(\vec{v}) \neq 0$ y se ha de emplear la ecuación de continuidad completa, la tercera de las 5.2.

5.2 Hidrostatica

El equilibrio de los líquidos bajo la acción de la gravedad es posiblemente el más antiguo de los temas estudiados por la mecánica de fluidos, cuyo origen se puede encontrar en la literatura de la antigüedad asociado al célebre principio del empuje de flotación, descubierto por Arquímedes de Siracusa (287-212 a. C.).

Consideremos las ecuaciones 5.2 para un fluido en reposo, $\vec{a} = 0$, por el momento sin ninguna restricción especial sobre ρ o sobre \vec{F} . La ecuación general del *equilibrio hidrostático* es

$$\text{grad}(p) = \vec{F}. \quad (5.5)$$

Las superficies con $p(x, y, z) = C$, siendo C una constante, se denominan *isobáricas*. El gradiente de p tiene la dirección de la normal a estas superficies, de modo que 5.5 implica que en el estado de equilibrio \vec{F} debe ser normal a las superficies de presión constante. La 5.5 sobredetermina la incógnita p , puesto que las fuerzas de volumen son datos del problema. Para que se pueda cumplir la condición de equilibrio es evidente que \vec{F} debe ser el gradiente de alguna función, o sea, que \vec{F} debe ser una fuerza conservativa. En efecto, tomando el rotor de 5.5, se deduce que

$$\text{rot}(\vec{F}) = 0. \quad (5.6)$$

No siempre \vec{F} satisface este requerimiento.

5.2.1 Magnetohidrostatica

Veamos, por ejemplo, el caso de un fluido conductor de la electricidad, por el cual circula la densidad de corriente \vec{j} y en el cual existe un campo magnético \vec{B} . Reemplazando la fuerza de Lorentz, 2.7, en 5.5 resulta

$$\text{grad}(p) = \frac{1}{c} \vec{j} \times \vec{B}, \quad (5.7)$$

de la cual se desprende que tanto \vec{j} cuanto \vec{B} deben ser vectores que yacen sobre las superficies isobáricas ($\vec{j} \bullet \text{grad}(p) = 0$, $\vec{B} \bullet \text{grad}(p) = 0$). Si las líneas de \vec{B} , digamos,

cruzan esas superficies la condición de equilibrio no puede ser satisfecha. Aplicando 5.6

$$\text{rot}(\vec{j} \times \vec{B}) = (\vec{B} \bullet \text{grad}) \vec{j} - (\vec{j} \bullet \text{grad}) \vec{B} = 0, \quad (5.8)$$

dado que $\text{div}(\vec{B}) = 0$ y $\text{div}(\vec{j}) = 0$, esta última porque en condiciones estáticas vale $4\pi \vec{j} = c \text{rot}(\vec{B})$. Sólo cuando se satisface 5.8, \vec{F} es el gradiente de alguna función y el equilibrio es posible. El estudio de estos equilibrios forma parte de la magnetohidrodinámica y tiene numerosas aplicaciones en la física de la fusión nuclear y en la astrofísica. El tema es demasiado extenso para ser tratado aquí.

5.3 La condición de barotropía

Con frecuencia la fuerza conocida es la fuerza por unidad de masa \vec{F} (por ejemplo, la gravedad: $-g\vec{E}_z$) y la fuerza por unidad de volumen es $\vec{F} = \rho \vec{F}$, entonces la 5.6 da

$$\text{grad}(\rho) \times \vec{F} + \rho \text{rot}(\vec{F}) = 0, \quad (5.9)$$

condición que no se cumple para cualquier distribución de densidad. No alcanza con pedir que $\vec{F} = -\text{grad}(\Omega)$ sea conservativa, i.e., que derive de un potencial Ω , para asegurar el equilibrio se debe cumplir también $\text{grad}(\rho) \times \vec{F} = 0$, es decir que \vec{F} sea normal a las superficies de igual densidad $\rho = \rho(x, y, z) = K$, donde K es una constante. Puesto que \vec{F} también debe ser normal a las superficies isobáricas, las superficies de igual densidad deben coincidir con las isobáricas. En suma, para que exista equilibrio es preciso que \vec{F} sea conservativa, normal a las superficies isobáricas y que la densidad esté estratificada conforme a la presión: $\rho = \rho(p)$, o bien $p = p(\rho)$. Cuando la presión es una función de la densidad (o viceversa) se dice que se cumple una condición de *barotropía*.

5.3.1 Equilibrios barotrópicos

Supongamos, entonces, que $p = p(\rho)$ y que $\vec{F} = -\text{grad}(\Omega)$. En este caso podemos definir una función

$$\mathcal{H} = \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho}, \quad (5.10)$$

de modo que

$$d\mathcal{H} = \frac{dp}{\rho}. \quad (5.11)$$

Escribiendo $d\mathcal{H} = \text{grad}(\mathcal{H}) \bullet \vec{\delta x}$ y $dp = \text{grad}(p) \bullet \vec{\delta x}$ resulta

$$\left[\text{grad}(\mathcal{H}) - \frac{1}{\rho} \text{grad}(p) \right] \bullet \vec{\delta x} = 0, \quad (5.12)$$

y puesto que esta ecuación vale para todo $\vec{\delta x}$, es necesario que

$$\text{grad}(\mathcal{H}) = \frac{1}{\rho} \text{grad}(p). \quad (5.13)$$

Cuando $p = p(\rho)$ es un dato aa función \mathcal{H} se puede calcular como una integral de la variable densidad

$$\mathcal{H} = \int_{\rho_0}^{\rho} \left(\frac{dp}{d\rho} \right) \frac{d\rho}{\rho}, \quad (5.14)$$

y se denomina *función de presión*. Ahora 5.5 se reescribe como

$$\text{grad}(\mathcal{H} + \Omega) = 0, \quad (5.15)$$

de la cual resulta

$$\mathcal{H} + \Omega = C, \quad (5.16)$$

donde C es una constante de integración. En consecuencia, la ecuación hidrostática se puede integrar exactamente cuando el fluido es barotrópico. La constante de integración se determina por el conocimiento del valor de la densidad (o de la presión) sobre alguna superficie equipotencial elegida como referencia.

5.4 Equilibrio de líquidos pesados

5.4.1 Nociones básicas

Un ejemplo de este tipo de solución ocurre en el caso del equilibrio de líquidos, considerados como incompresibles y cuya densidad es uniforme. En ese caso ρ es una constante y $d\mathcal{H} = d(p/\rho)$. La función de presión es simplemente p/ρ , de modo que la ecuación

$$p + \rho\Omega = C, \quad (5.17)$$

permite conocer la variación de la presión en concordancia con la variación del potencial. Es evidente que p es constante sobre las superficies equipotenciales y que estas coinciden con las isobaras. Sea el caso de la gravedad sobre la superficie terrestre, $\Omega = gz$, donde z es la dirección vertical y el líquido ocupa la región $z < 0$, entonces vale la ecuación

$$p = p_0 - \rho gz = p_0 + \rho gh. \quad (5.18)$$

Aquí hemos introducido la presión atmosférica p_0 sobre la superficie libre del líquido $z = 0$ y hemos empleado la profundidad h , escribiendo $z = -h$. Las superficies isobáricas son planos horizontales, normales a la fuerza de gravedad. La cantidad $p - p_0 = \rho gh$ se denomina *presión de sobrecarga* (respecto de la atmósfera) que existe en el seno del líquido a la profundidad h .

Para el agua la sobrecarga es de aproximadamente una atmósfera cada 10 metros de profundidad. La presión a cualquier profundidad no depende de la forma del volumen ocupado por el líquido, ni de la cantidad de fluido presente, sólo depende de h . Una columna de agua de 30 metros siempre ejerce una sobrecarga de 3 atmósferas sobre el fondo, tanto en el caso de un tanque cilíndrico de 5 metros de diámetro cuanto si se trata de un modesto caño de 2 cm de diámetro. La igualdad de la presión sobre planos horizontales en el líquido, dada por 5.18, explica el conocido fenómeno de los *vasos comunicantes* abiertos a la atmósfera, discutido por el holandés Stevin (1586). Un líquido contenido en dos o más recipientes de cualquier forma, abiertos a la atmósfera y cuyos fondos tienen una comunicación común (por ejemplo, un tubo en U) llega a la misma altura en todos ellos.

El principio de funcionamiento de la prensa hidráulica se explica con los mismos conceptos. Dos cilindros de distinta sección, S_1 y S_2 , tales que $S_2 \gg S_1$, contienen un líquido que se comunica por el fondo de un recipiente común a ambos. Los cilindros poseen pistones, bien adherentes a las paredes de modo que el fluido no pueda escurrirse, los cuales apoyan sobre el líquido en ambas ramas del dispositivo. Si se aplica una fuerza F_1 (por ejemplo, un peso considerable) sobre el pistón S_1 , la presión en la superficie de contacto con el líquido $p = F_1/S_1$. La misma presión (ignorando la diferencia insignificante que se origina por diferencias de altura de los pistones) se encuentra sobre la superficie S_2 del segundo pistón, debido al principio de los vasos comunicantes. Por lo tanto $F_1/S_1 = F_2/S_2$ y se obtiene en el segundo pistón un considerable aumento de la fuerza aplicada sobre el primero, en la proporción S_2/S_1 .

Estas propiedades se aplican también en la operación de manómetros y barómetros. Un manómetro es un instrumento para medir sobrecargas moderadas. Es un tubo de vidrio en U con ramas dispuestas según la vertical, con un líquido cuya densidad ρ es conocida. Una de sus ramas, en la cual el líquido alcanza una altura h_1 respecto del fondo, se conecta a un recipiente en el cual tenemos confinado un gas cuya presión desconocida

p_1 deseamos medir. La otra rama está abierta a la atmósfera cuya presión es p_0 y el líquido marca una altura h_0 . Aplicando 5.17, en la cual elegimos $z = 0$ para el fondo del manómetro cuya presión denotamos con p_f , tenemos

$$p_0 + \rho g h_0 = p_f = p_1 + \rho g h_1. \quad (5.19)$$

Resulta

$$\Delta p = p_1 - p_0 = \kappa(h_0 - h_1), \quad (5.20)$$

donde $\kappa = \rho g$ es el peso específico del líquido del manómetro. Por supuesto, la diferencia de alturas $h_0 - h_1$ es positiva cuando el gas está comprimido a una presión mayor que p_0 y en cambio es negativa cuando el recipiente contiene un gas rarefacto cuya presión es menor que la atmosférica. Un esquema similar se emplea para medir la presión atmosférica en el barómetro de Torricelli. Un tubo de vidrio de algo menos de un metro de longitud, cerrado en un extremo, se llena de mercurio. Se dispone el tubo en vertical volcando el extremo abierto en una cubeta que contiene el mismo líquido, cuidando que no penetre aire en el tubo. Una parte del mercurio contenido en el tubo desciende y se une al de la cubeta, dejando una zona de vacío en la extremidad superior. La altura de mercurio en el tubo respecto de la superficie del mercurio expuesto al aire en la cubeta, h , mide la presión atmosférica. En efecto, en este caso tenemos

$$p_0 = \kappa h, \quad (5.21)$$

puesto que cuando $z = h$ la presión es nula.

Una columna de 760 mm de Hg ejerce una sobrecarga que se define como 1 *atmósfera normal*, la unidad originalmente usada en mediciones barométricas. En los laboratorios donde se trabaja con vacío todavía se emplea frecuentemente el *torr*, que equivale a la sobrecarga de 1 mm de Hg (por Torricelli, discípulo de Galileo Galilei e inventor del barómetro de mercurio). Empleando la densidad del mercurio y la gravedad terrestre (981 cm/s^2) resulta que 1 atm equivale a 1033 cm de columna de agua. La unidad cgs de presión es la *baria* = 1 dina/cm² y en MKS la unidad es el *pascal* = 1 newton/m², de modo que 1 pascal = 10 barias. En meteorología se empleaba también la unidad *Bar* = 10⁶ barias, que vale casi 1 atm, pero más recientemente prevalece el *hectopascal* = 100 pascuales. La equivalencia en esta floresta de unidades de presión (no queremos ni acordarnos de las unidades inglesas, la pulgada de Hg o la libra por pulgada cuadrada) es como sigue, 1 Atm = 760 Torr = 1033 cm H₂O = 1.033 Bar = 1033 mBar = 1013 Hpascal

5.4.2 El empuje de flotación

La hidrostática de líquidos pesados tiene un amplio campo de aplicaciones en la navegación de barcos o submarinos y en la construcción de diques, en lo que concierne el estudio de la flotación y la estabilidad de cuerpos sumergidos o semisumergidos, así como en lo atinente a la resultante y el momento resultante de las fuerzas que ejerce el líquido sobre las paredes que lo confinan. Son temas con un desarrollo muy extenso en varias ramas de la ingeniería. Nos limitamos aquí a pocas nociones básicas.

Cuando un cuerpo rígido, que ocupa un volumen V rodeado por una superficie cerrada S , está completamente sumergido en el líquido ($z < 0$, superficie libre en $z = 0$), la resultante de las acciones del líquido sobre el cuerpo vale

$$\vec{f}^{(R)} = - \oint_S (p_0 - \kappa z) \vec{n} dS, \quad (5.22)$$

donde κ es el peso específico del líquido. Calculando la integral obtenemos

$$\vec{f}^{(R)} = -p_0 \oint_S \vec{n} dS + \kappa \oint_S z \vec{n} dS = \kappa \oint_S z \vec{n} dS = \kappa \int_V \text{grad}(z) d^3x = \kappa V \vec{E}_z, \quad (5.23)$$

un empuje vertical de flotación equivalente al peso κV del volumen de líquido desplazado por la presencia del cuerpo. La fuerza peso del cuerpo depende del peso específico del

cuerpo y vale $\vec{P} = -\kappa_c V \vec{E}_z$ cuando el peso específico del cuerpo es uniforme. En esas condiciones, si $\kappa_c > \kappa$ el cuerpo se hunde, si $\kappa_c < \kappa$ tiende a flotar y cuando $\kappa_c = \kappa$ tenemos un equilibrio neutro. Al límite, cuando $\kappa_c = \kappa$, se puede pensar que el cuerpo puede ser efectivamente reemplazado por igual volumen de líquido y es obvio que el equilibrio hidrostático queda inalterado.

El cálculo del momento de las fuerzas de presión, que el lector puede realizar como un ejercicio sencillo, muestra que el empuje de flotación se aplica al centro de masa del volumen V de líquido, \vec{x}_L . Este punto se suele denominar *centro de flotación*, o también, *metacentro*. El peso del cuerpo se aplica en cambio en el *centro de masa* del cuerpo, \vec{x}_C . Estos dos puntos coinciden si el cuerpo tiene una densidad ρ_c uniforme, pero son distintos cuando el cuerpo es inhomogéneo. En esta última circunstancia las fuerzas sobre el cuerpo podrían estar equilibradas, $\vec{f}^{(R)} + \vec{P} = 0$, pero con una cupla resultante que tiende a hacer rotar el cuerpo. La cupla se anula si \vec{x}_L está sobre la misma línea vertical de \vec{x}_C . Pero en ese caso, se comprende fácilmente que la posición del cuerpo sumergido es estable cuando el centro de flotación, \vec{x}_L , ocupa la posición superior, \vec{x}_C , el centro de masa, la posición inferior. En cambio, cuando \vec{x}_C es más alto que \vec{x}_L , el cuerpo está en una posición inestable y tiende a tumbarse, de modo que finalmente \vec{x}_C quede más abajo que \vec{x}_L .

Cuando el cuerpo está semisumergido, el plano horizontal de la superficie libre corta el cuerpo. El lector puede mostrar como ejercicio que, nuevamente, el empuje de flotación equivale al peso del volumen de líquido desplazado, esta vez sólo por la parte sumergida del cuerpo. El estudio del punto de aplicación del empuje, o sea, la determinación del centro de flotación, y la discusión de la estabilidad del cuerpo flotante son algo más elaborados que el caso precedente.

5.5 La teoría de equilibrio de las mareas

La explicación de las mareas fue desarrollada por Newton mediante una teoría de la figura de equilibrio de los mares. Fue luego perfeccionada por Bernouilli y contiene una parte de la solución del problema, por ejemplo predice marea alta cada doce horas, mientras la idea simplista que el fenómeno se explica sólo con la atracción de la Luna conduce a una sola alta marea por día. La teoría de equilibrio fue superada más adelante por la teoría dinámica de las mareas, debida a Laplace.

La teoría de Newton supone que, en cada instante, la superficie libre del mar toma la forma de equilibrio que correspondería a la acción de un cuerpo celeste perturbador que mantuviera su posición fija respecto de la Tierra, mientras esta última rota sobre su eje y sufre una aceleración dirigida hacia aquel. En otras palabras, la superficie libre (donde p es constante) es una superficie equipotencial (ver 5.17) $\Omega = const.$ generada por la acción combinada de la gravedad terrestre, la fuerza centrífuga y otra fuerza perturbadora originada por la presencia del cuerpo celeste. Empleando los potenciales de estas fuerzas escribiremos

$$\Phi - \frac{1}{2}\omega^2 d^2 + \Upsilon = const., \quad (5.24)$$

donde Φ es el potencial de la gravedad terrestre, el segundo término representa el potencial centrífugo, siendo d la distancia al eje de rotación y ω la velocidad angular, mientras que Υ es el potencial de la perturbación, que describimos a continuación.

Sea O el centro de la Tierra, P un punto cualquiera del mar y C la posición de la Luna, la distancia \overline{OP} al centro se indicará con r . Entonces el segmento $\overline{OC} = D$ es la distancia de la Luna respecto del centro de la Tierra y $\theta = \angle(\overline{OP}, \overline{OC})$, el ángulo entre \overline{OP} y \overline{OC} , es la distancia angular Luna-zenith del punto P vista desde el centro de la Tierra. Podemos escribir

$$\Upsilon_1 = -G \frac{M_L}{PC} \quad (5.25)$$

para el potencial gravitatorio de la Luna en P , donde G es la constante de la gravitación universal, M_L es la masa de la Luna y \overline{PC} , que denotaremos con R , es la distancia de P

al centro lunar. Asimismo podemos poner

$$\Upsilon_2 = -G \frac{M_L}{D^2} r \cos(\theta), \quad (5.26)$$

para el potencial en P correspondiente a una aceleración uniforme ($z = r \cos(\theta)$, en coordenadas esféricas) de toda la Tierra hacia la Luna. En efecto, si vamos a describir el equilibrio desde una plataforma fija a la Tierra, esta no es precisamente un sistema inercial sino que se halla en estado de aceleración. Por lo tanto, a las fuerzas operantes sobre la Tierra debemos agregar una fuerza de inercia adicional. Esta es la novedad substancial introducida por Newton y es la clave de la explicación correcta de las mareas. Naturalmente, $\Upsilon = \Upsilon_1 + \Upsilon_2$.

La geometría permite expresar R como $(r^2 + D^2 - 2Dr \cos(\theta))^{\frac{1}{2}}$ y dado que $r/D \ll 1$ podemos desarrollar en serie de potencias

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{D} \left[1 + \frac{r}{D} \cos(\theta) + \left(\frac{r}{D}\right)^2 \frac{1}{2} (3 \cos^2(\theta) - 1) + \dots \right]. \quad (5.27)$$

La teoría de funciones especiales enseña que

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{D} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{D}\right)^n P_n(\cos(\theta)), \quad (5.28)$$

donde $P_n(z)$, $z \equiv \cos(\theta)$, son los polinomios de Legendre, definidos por

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} (z^2 - 1)^n. \quad (5.29)$$

Calculamos Υ desarrollando $1/R$ y retenemos sólo el orden más bajo significativo en r/D . Se obtiene

$$\Upsilon = \frac{3}{2} G \frac{M_L}{D} \left(\frac{r}{D}\right)^2 (3 \cos^2(\theta) - 1). \quad (5.30)$$

En esta aproximación el potencial de la perturbación, como destacó Kelvin, es igual al potencial generado por dos masas iguales a $\frac{1}{2}M_L$, ubicadas en los puntos C y C' , tales que $OC = OC'$ y los tres puntos C', O, C , están alineados. Estos centros ficticios de atracción se denominan Luna y Anti-Luna, respectivamente. El lector puede verificar, como ejercicio, esta propiedad.

Vamos a indicar con ζ la elevación del agua respecto del nivel no perturbado por la presencia de la Luna. Las cantidades con subíndice 0 denotan los valores no perturbados. Desarrollamos la ecuación de la superficie equipotencial, 5.24, alrededor del nivel libre no perturbado, hasta la primera aproximación

$$\left[\Phi - \frac{1}{2} \omega^2 d^2 \right]_0 + \left[\frac{\partial}{\partial n} \left(\Phi - \frac{1}{2} \omega^2 d^2 \right) \right]_0 \zeta + \Upsilon = \text{const.}, \quad (5.31)$$

donde $\partial/\partial n$ indica la derivada según la normal exterior. El primer término es una constante y por lo tanto podemos escribir

$$\zeta = \frac{\Upsilon}{g} + \widehat{C}, \quad (5.32)$$

donde \widehat{C} es una constante y g es la gravedad aparente en cada lugar debida a la acción combinada de la atracción de la Tierra y la fuerza centrífuga de la rotación, vista en el nivel no perturbado

$$g = \left[\frac{\partial}{\partial n} \left(\Phi - \frac{1}{2} \omega^2 d^2 \right) \right]_0. \quad (5.33)$$

La gravedad aparente varía sobre la superficie terrestre, pero en un examen aproximado de la marea podemos ignorar las variaciones de g y la elipticidad del nivel no perturbado. En primera instancia, ponemos

$$r = R_T, \quad g = G \frac{M_T}{R_T^2}, \quad (5.34)$$

donde R_T es el radio medio y M_T la masa de la Tierra, respectivamente. Se obtiene

$$\zeta = h \left(\cos^2(\theta) - \frac{1}{3} \right) + \hat{C}, \quad (5.35)$$

donde hemos introducido la escala de altura de marea, h , definida por

$$h \equiv \frac{3}{2} \frac{M_L}{M_T} \left(\frac{R_T}{D} \right)^3 R_T. \quad (5.36)$$

La constante \hat{C} se puede determinar teniendo en cuenta que, debido a la conservación del volumen del líquido, debe ser

$$\int_S \zeta dS = 0, \quad (5.37)$$

integrando sobre la superficie S del océano. Suponiendo que el agua cubre toda la Tierra:

$$\hat{C} = -\frac{1}{2} h \int_0^\pi \sin(\theta) \left(\cos^2(\theta) - \frac{1}{3} \right) d\theta = 0. \quad (5.38)$$

La forma de equilibrio de la superficie libre es un esferoide descrito por una función armónica de segundo orden (proporcional a $P_n(z)$) cuyo eje pasa por el cuerpo perturbador. El esferoide tiene dos máximos, uno en la posición sublunar y otro en la dirección exactamente opuesta, por el centro de la Tierra (ver figura). Para simplificar supongamos que la Luna está en una posición equatorial: debido a la rotación de la Tierra sobre su eje, un punto del océano sufre dos altas mareas y dos bajas mareas diarias. Puesto que el día solar es de 24 horas, mientras que se necesitan 24 horas y 50 minutos para que la Luna vuelva a pasar por el mismo punto de la Tierra (porque la Luna rota alrededor de la Tierra en 27 días, aproximadamente) el comienzo de cada ciclo de marea se desfasa de unos 50 minutos entre un día y el siguiente.

Hay otros factores en juego. El Sol también influye sobre las mareas y el plano de la órbita lunar no coincide exactamente con la eclíptica. Estos efectos se superponen de una manera compleja sobre el ciclo de las mareas, pero las nociones básicas de la teoría del equilibrio han quedado esbozadas.

5.6 Atmósfera politrópica

En un gas una relación de barotropía del tipo

$$p = A\rho^n \quad (5.39)$$

se denomina *politrópica* y n se llama índice politrópico. Para aire con un grado significativo de humedad $n = 1.2$ corresponde aproximadamente al valor observado en la atmósfera terrestre. El significado físico de esta dependencia entre presión y densidad se comprende mediante el concepto de *equilibrio convectivo* debido a Kelvin (1862). Tomamos de Chandrasekhar (*Stellar Structure*, Dover, N.Y., 1957) algunas citas significativas de Kelvin sobre esta cuestión.

”Se dice que un fluido bajo la acción de la gravedad está en equilibrio convectivo, si la densidad y la temperatura se distribuyen en la totalidad de la masa fluida de modo que las superficies de igual densidad y las superficies de igual temperatura permanecen

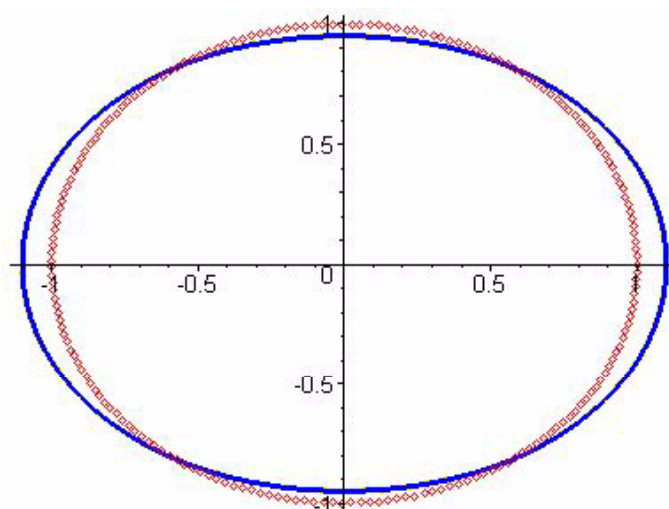


Figura 1 Figura de equilibrio (línea azul) para explicar la teoría estática de las mareas. Representa el desplazamiento respecto del radio terrestre dado por la ecuación 5.35

invariadas cuando se producen corrientes asociadas a una influencia perturbadora tan débil, que los cambios de presión debidos a la inercia del movimiento son despreciables". Note el lector el cierre de la frase, donde asume que la inercia del movimiento es despreciable: significa que aún cuando se consideran desplazamientos del gas, estos son tan lentos que en todo momento se satisface con buena aproximación la ecuación hidrostática (la aceleración no cuenta). Kelvin agrega "...la esencia del equilibrio convectivo es que si una pequeña porción cúbica o esférica del fluido, en cualquier posición, P , se encierra idealmente con una membrana impermeable al calor y se la deja expandir o contraer hasta la densidad que posee el fluido en otra posición, P' , su temperatura se va a modificar, por la expansión o la contracción, desde la temperatura que tenía en P hasta la temperatura actual del fluido en P' ."

Lo que Kelvin propone es un proceso reversible, cuasiestático, de tipo adiabático, que se desarrolla en cualquier elemento del fluido bajo una muy tenue perturbación y que da lugar, por lo tanto, a una relación del tipo $p = A\rho^\gamma$, donde γ es el cociente de los calores específicos. Esta dependencia existe no sólo dentro del volumen que se desplaza, sino que además se encuentra establecida en toda la masa del fluido. El siguiente comentario de Kelvin aclara. "Si un gas está contenido en una esfera rígida e impermeable al calor y lo dejamos aislado por un tiempo suficientemente largo, se asentará en un estado de equilibrio térmico global mediante la conducción del calor, hasta que la temperatura se vuelva uniforme. Pero si lo revolvemos artificialmente en todo el volumen, las corrientes que no alteran considerablemente la distribución estática de presión y densidad lo llevarán, aproximadamente, a lo que yo he denominado equilibrio convectivo de la temperatura. La agitación natural producida en una gran masa de fluido como el Sol por el enfriamiento de la superficie, debe, yo creo, mantener una buena aproximación al equilibrio convectivo en toda la masa".

Hoy sabemos que el Sol no está enteramente en equilibrio convectivo, porque tiene una zona central donde se produce energía por reacciones de fusión nuclear, cosa que se ignoraba en tiempos de Kelvin, pero ciertamente una parte de la estructura de la estrella se encuentra, aproximadamente, en equilibrio convectivo. Lo que nos interesa destacar de los comentarios citados, es que podemos emplear la relación adiabática entre p y ρ junto con la ecuación hidrostática, mientras se cumpla la condición termodinámica $\delta Q = 0$ (los elementos del gas no intercambian calor) durante el suave revolverse o agitarse del fluido, evocado por Kelvin.

Sin embargo, esta condición no describe el caso más general. Ya hemos men-

cionado que un índice politrópico $n \neq \gamma$ se ajusta más a lo observado en la atmósfera terrestre. El mismo Kelvin fue llevado a considerar procesos de mezcla, o agitación del aire, en los cuales $\delta Q \neq 0$ debido a la presencia de humedad, la cual puede producir la condensación del vapor en las corrientes ascendentes. Los cambios de estado que tienen lugar durante la convección natural en estas condiciones se representan mejor con una ecuación termodinámica del tipo

$$\delta Q = c dT, \quad (5.40)$$

en la cual c es un calor específico, aproximadamente constante. Durante el proceso de agitación el calor entregado al sistema es proporcional al cambio instantáneo de temperatura. Esta es la definición de un proceso politrópico.

Si en estas circunstancias escribimos la primera ley de la termodinámica para una pequeña porción del gas, resulta

$$(c_v - c)dT + p dV = 0, \quad (5.41)$$

y dado que para los gases perfectos vale la relación $pV = R_g T$, donde R_g es la constante del gas, tal que $R_g = c_p - c_v$, se obtiene, entonces, la siguiente ecuación para los cambios politrópicos

$$(c_v - c) \frac{dT}{T} + (c_p - c_v) \frac{dV}{V} = 0. \quad (5.42)$$

Integrando resulta

$$T^{(c_v - c)} V^{(c_p - c_v)} = \text{constante}, \quad (5.43)$$

de la cual, empleando la ecuación de estado y la relación $\rho \propto 1/V$, se pasa fácilmente a la ecuación 5.39, $p = A\rho^n$, en la cual el índice politrópico vale

$$n = \frac{c_p - c}{c_v - c}. \quad (5.44)$$

Por lo tanto, en el estudio de los equilibrios convectivos de la atmósfera se emplea la relación politrópica. Esta última es más general que la adiabática y la comprende en el caso $c = 0$.

La función de presión 5.14 cuando $n \neq 1$ es

$$\mathcal{H} = \int_{\rho_0}^{\rho} An\rho^{n-2} d\rho = \frac{An}{n-1} \rho^{n-1} = \frac{n}{n-1} \frac{p}{\rho} = \frac{n}{n-1} \frac{RT}{\mu}, \quad (5.45)$$

donde empleamos la ecuación de estado de *gases perfectos*

$$p = \frac{\rho RT}{\mu}, \quad (5.46)$$

siendo T la temperatura absoluta, R la constante universal de los gases (8.31×10^7 erg/°K-mol) y μ el peso molecular. Combinando 5.39 con 5.46 se obtiene

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{n}{n-1}}, \quad \frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{1}{n-1}}, \quad (5.47)$$

ecuaciones que relacionan la presión y la densidad con la temperatura, donde el subíndice 0 se refiere a un estado termodinámico de referencia.

El equilibrio bajo la acción de fuerzas conservativas se obtiene con 5.16

$$\frac{n}{n-1} \frac{RT}{\mu} + \Omega = C. \quad (5.48)$$

En el caso de la gravedad terrestre $\Omega = gz$, poniendo T_0 para la temperatura en $z = 0$ resulta

$$T = T_0 \left(1 - \frac{n-1}{n} \frac{z}{L} \right), \quad (5.49)$$

donde

$$L = \frac{\mu g}{RT_0} \quad (5.50)$$

es la escala de altura de la atmósfera. Tomando la temperatura standard para $T_0 = 273$ °K, resulta $L = 7.99$ km. El descenso de la temperatura se describe con un gradiente constante

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{n-1}{n} \frac{T_0}{L} \approx -5.7 \text{ °K/km} \quad (5.51)$$

y la presión y la densidad varían según

$$\frac{p}{p_0} = \left(1 - \frac{n-1}{n} \frac{z}{L}\right)^{\frac{n}{n-1}} \quad \frac{\rho}{\rho_0} = \left(1 - \frac{n-1}{n} \frac{z}{L}\right)^{\frac{1}{n-1}}. \quad (5.52)$$

La ecuación 5.49 nos muestra que la atmósfera es finita y para $n = 1.2$ llega a una altura $z = 6L = 48$ km. En realidad, la atmósfera se compone de diferentes regiones, la más baja, denominada *troposfera* alcanza, en latitudes medias, unos 11 km de altura y debido a los movimientos convectivos que mezclan continuamente las capas de aire, se encuentra en un equilibrio politrópico medio aproximado, con $n = 1.2$. Más arriba está la *estratosfera*, una región en la cual la temperatura es aproximadamente constante, alrededor de $T=223$ °K, y más arriba aún la temperatura de la alta atmósfera comienza a crecer hasta unirse al tenue plasma de la magnetosfera. Naturalmente, troposfera y estratosfera no tiene una frontera definida, sino que se pasa gradualmente de una región a otra.

5.6.1 Atmósfera isotérmica

El caso $n = 1$ corresponde a un gas en equilibrio térmico como indica la ecuación de estado 5.46. La función de presión en este caso es

$$G = \frac{RT}{\mu} \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho} = \frac{RT}{\mu} \ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right), \quad (5.53)$$

donde hemos puesto $\mathcal{H} = G$, el *potencial termodinámico de Gibbs*. En efecto, cuando se compara el estado termodinámico de dos pequeños volúmenes de gas próximos entre sí podemos escribir la primera ley de la termodinámica en la forma

$$dE + pd\left(\frac{1}{\rho}\right) = TdS = \delta Q. \quad (5.54)$$

En esta ecuación E es la *energía interna* y S la *entropía*, ambos potenciales termodinámicos definidos por unidad de masa, $1/\rho$ es el *volumen específico* (volumen de la unidad de masa) y δQ es el calor intercambiado con el ambiente para poder pasar de un estado al otro del gas. Si la temperatura es constante podemos reescribir 5.54 como

$$d\left(E + \frac{p}{\rho} - TS\right) = \frac{dp}{\rho}, \quad (5.55)$$

donde $G = E + p/\rho - TS$. De aquí, con el mismo argumento que en 5.12, resulta

$$\text{grad}(G) = \frac{1}{\rho} \text{grad}(p) \quad (5.56)$$

Volviendo a la 5.16 se obtiene

$$G + \Omega = C \quad (5.57)$$

para el equilibrio isotérmico en un potencial de fuerzas general. En particular, para la gravedad terrestre tenemos

$$\frac{RT}{\mu} \ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) + gz = 0, \quad (5.58)$$

donde hemos puesto $\rho = \rho_0$ cuando $z = 0$, en la base de la atmósfera. De aquí se obtiene

$$\rho = \rho_0 \exp\left(-\frac{mgz}{kT}\right) = \rho_0 \exp\left(-\frac{z}{L}\right), \quad (5.59)$$

donde se ha usado la relación $R/\mu = k/m$ entre la constante universal de los gases y la constante de Boltzmann ($k = 1.38 \times 10^{-16}$ erg/°K; m : masa molecular) y la definición 5.50. La atmósfera isotérmica se caracteriza por un decaimiento exponencial de ρ y p con la altura. La primera ecuación 5.59 coincide con el resultado de la distribución de equilibrio de Boltzmann, obtenida con los métodos de la mecánica estadística en los comienzos de esa nueva disciplina física. La atmósfera isotérmica se extiende hasta el infinito, pero la densidad decrece rápidamente con la escala característica L .

5.6.2 Atmósfera adiabática

Cuando el índice politrópico vale $n = \gamma = c_p/c_v$ tenemos un gas en *equilibrio adiabático*. Es una configuración tal que en cada lugar se ha establecido la relación

$$p = A\rho^\gamma, \quad (5.60)$$

donde A es una constante ($A = p_0/\rho_0^\gamma$) y γ es el cociente de los calores específicos a presión y volumen constantes. En el caso del aire $\gamma = 1.40$. La función 5.14 vale

$$H = \int_{\rho_0}^{\rho} A\gamma\rho^{\gamma-2}d\rho = \frac{A\gamma}{\gamma-1}\rho^{\gamma-1} = \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho} = \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{RT}{\mu}, \quad (5.61)$$

donde hemos empleado la ecuación de estado de los gases y la notación H , porque en este caso la función de presión es un potencial termodinámico denominado *entalpía*. El miembro izquierdo de la ecuación 5.54 es ahora nulo, por la hipótesis adiabática. Entonces 5.54 es equivalente a

$$d\left(E + \frac{p}{\rho}\right) = \frac{dp}{\rho}, \quad (5.62)$$

donde

$$H = E + \frac{p}{\rho}, \quad (5.63)$$

es la entalpía. Evidentemente $dH = dp/\rho$ y por el argumento empleado en 5.12

$$\text{grad}(H) = \frac{1}{\rho}\text{grad}(p), \quad (5.64)$$

es decir, \mathcal{H} coincide con la entalpía.

Reemplazando 5.61 en 5.16, resulta

$$\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{RT}{\mu} + \Omega = C, \quad (5.65)$$

y en el caso de la gravedad terrestre

$$\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{RT}{\mu} + gz = \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{RT_0}{\mu}, \quad (5.66)$$

donde hemos fijado una temperatura T_0 en el nivel del mar $z = 0$. Reordenando la ecuación se obtiene

$$T = T_0\left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{\mu gz}{RT_0}\right), \quad (5.67)$$

y la cantidad

$$\left(\frac{dT}{dz}\right)_{ad} \equiv -\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{\mu g}{R}, \quad (5.68)$$

se denomina *gradiente adiabático*. En el caso de la atmósfera terrestre marca un descenso de aproximadamente 1° centígrado por cada 100 metros de altura (10 °K/km). En valor absoluto el gradiente adiabático 5.68 es superior al gradiente politrópico 5.51. El gradiente adiabático tiene un papel destacado en el análisis de la estabilidad del equilibrio atmosférico. La presión y la densidad se calculan con 5.47 donde $n = \gamma$.

5.7 Nociones sobre la estabilidad atmosférica

Examinemos la estabilidad de un cierto equilibrio hidrostático. Tomamos un pequeño elemento de volumen y lo desplazamos desde una altura z a $z + dz$. El elemento se expande adiabáticamente (no hay tiempo para intercambiar calor) hasta que la presión interna es igual a la del ambiente que lo rodea. Lo dejamos libre y estudiamos si comienza a moverse de modo de volver a la posición inicial, o bien si continua moviéndose hacia arriba. En el primer caso el equilibrio es estable, en el segundo no hay estabilidad, el equilibrio se rompe y comienza un movimiento convectivo. Sean ρ_1, p_1 , los valores de la configuración de equilibrio a la altura z y ρ_2, p_2 , los valores correspondientes al ambiente en $z + dz$. El estado termodinámico del elemento perturbado se indicará con notación primada, ρ', p' . Puesto que al comienzo de la perturbación el elemento de volumen no difiere del ambiente, tenemos $\rho'_1 = \rho_1, p'_1 = p_1$. Al final del desplazamiento la presión del elemento perturbado es igual a la del ambiente, $p'_2 = p_2$, pero la densidad puede ser distinta, dado que depende de la expansión adiabática que sufre el elemento. Por lo tanto

$$\rho'_2 = \rho'_1 \left(\frac{p'_2}{p'_1} \right)^{\frac{1}{\gamma}} = \rho_1 \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1}{\gamma}}. \quad (5.69)$$

Si ρ'_2 es mayor que la densidad del ambiente, el peso del volumen desplazado causa su hundimiento respecto a la atmósfera adyacente, de modo que vuelve hacia su posición original. La condición

$$\rho'_2 > \rho_2, \quad (5.70)$$

asegura la estabilidad del equilibrio de la atmósfera. Esta condición se puede escribir de una manera más significativa,

$$\rho_1 \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1}{\gamma}} = \rho_1 \left(1 + \frac{1}{\gamma p} \frac{dp}{dz} dz \right) > \rho_2 = \rho_1 + \frac{d\rho}{dz} dz, \quad (5.71)$$

o sea

$$\frac{1}{\gamma p} \frac{dp}{dz} > \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz}. \quad (5.72)$$

Empleando la ecuación hidrostática

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \quad (5.73)$$

y la ecuación de estado de los gases 5.46 podemos reescribir la condición de estabilidad como

$$-\frac{1}{\gamma} \frac{\mu g}{RT} > \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz} = -\frac{\rho g}{p} - \frac{1}{T} \frac{dT}{dz}. \quad (5.74)$$

De la cual se deduce

$$\frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\mu g}{R} > -\frac{dT}{dz}, \quad (5.75)$$

y comparando con 5.68

$$\frac{dT}{dz} > \left(\frac{dT}{dz} \right)_{ad} = -\frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\mu g}{R}. \quad (5.76)$$

Si la temperatura de la atmósfera disminuye con la altura más lentamente que el gradiente adiabático se encuentra en equilibrio estable. Por ejemplo, ello ocurre en un equilibrio politrópico en el cual $n < \gamma$. A veces en ciertas capas de la atmósfera se presenta una situación inusual, la temperatura aumenta con la altura en lugar de disminuir. Este evento se denomina inversión de temperatura y da lugar a una configuración sumamente estable. En cambio, cuando la atmósfera se enfría, de modo que la temperatura decrece con la altura más rápidamente de lo previsto por el gradiente adiabático, entonces el equilibrio se vuelve inestable y se producen corrientes convectivas que tratan de mezclar el gas para disminuir el valor absoluto del gradiente térmico. La condición 5.76 es de la mayor importancia y tiene un amplio campo de aplicaciones en meteorología y astrofísica.

5.8 Equilibrios autogravitatorios

La teoría de las estructuras estelares es una rama importante de la astrofísica de considerable extensión y complejidad. Podemos formarnos una idea elemental de algunos de los principios físicos en juego estudiando la configuración de equilibrio autogravitante de grandes masas de gas en equilibrio convectivo. Se omiten, naturalmente, muchos aspectos esenciales del problema en este cálculo, entre los más destacados: la radiación y la generación de energía nuclear en el centro de las estrellas. Vamos a describir aquí el modelo politrópico de estrellas debido a Emde a principios del siglo XX.

Suponemos una masa de gas con simetría esférica, de modo que todas las magnitudes, p , ρ , T , son funciones sólo de r , la distancia al centro del astro. Sea $M(r)$ la masa de gas contenida en una esfera de radio r . En tal caso podemos escribir

$$M(r) = \int_0^r 4\pi r^2 \rho dr, \quad (5.77)$$

junto con

$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho \quad (5.78)$$

Por otro lado, en este caso la ecuación 5.5 del equilibrio hidrostático toma la forma

$$\frac{dp}{dr} = -G \frac{M(r)}{r^2} \rho, \quad (5.79)$$

donde G es la constante de la gravitación universal. De estas ecuaciones se deduce

$$\frac{1}{r^2} \left(\frac{r^2 dp}{\rho dr} \right) = -4\pi G \rho, \quad (5.80)$$

la ecuación diferencial de los equilibrios autogravitantes. Para integrarla necesitamos una relación entre p y ρ , que en este caso será la ecuación politrópica

$$\frac{\rho}{\rho_c} = \left(\frac{p}{p_c} \right)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{T}{T_c} \right)^{\frac{1}{n-1}}, \quad (5.81)$$

con índice n . Hemos introducido en 5.81 los valores de la densidad, presión y temperatura en el centro de la estrella, ρ_c, p_c, T_c . La ecuación 5.80 junto con la 5.81 conducen a la ecuación de Emde - Lane, una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden de carácter no lineal para la temperatura, muy estudiada desde la segunda mitad de 1800 hasta las primeras décadas de 1900.

La ecuación de Emde - Lane sólo admite un estudio analítico parcial, una solución completa del caso general requiere un tratamiento numérico. Para ello, es mejor plantear la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden, constituido por 5.78 y 5.79. Conviene usar variables sin dimensiones, empleando como unidad la masa del Sol M_O y como unidad de distancia el radio del Sol R_O , como es usual en la teoría de las estructuras estelares y los valores de ρ_c, p_c, T_c . Definimos, entonces, las siguientes variables

$$q = \frac{M(r)}{M_O}, \quad x = \frac{r}{R_O}, \quad \psi = \frac{p}{p_c}, \quad \eta = \frac{\rho}{\rho_c}, \quad \theta = \frac{T}{T_c}. \quad (5.82)$$

El sistema de ecuaciones diferenciales toma la forma

$$\begin{aligned} \frac{dq}{dx} &= ax^2 \psi^{\frac{1}{n}}, \\ \frac{d\psi}{dx} &= -bq \frac{\psi^{\frac{1}{n}}}{x^2}, \end{aligned} \quad (5.83)$$

donde hemos introducido dos constantes adimensionales

$$a \equiv \frac{4\pi R_O^3 \rho_c}{M_O}, \quad b \equiv \frac{GM_O m}{R_O} \frac{1}{kT_c} = \frac{GM_O}{R_O} \frac{\rho_c}{p_c}. \quad (5.84)$$

Para llegar a la segunda constante empleamos la ecuación de estado

$$\frac{p_c}{\rho_c} = \frac{kT_c}{m}, \quad (5.85)$$

escrita mediante la constante de Boltzmann, k y la masa molecular del gas, m . Es evidente que la constante a es tres veces el cociente entre la densidad del centro de la estrella y la densidad media del Sol, $\overline{\rho}_O$. La constante b es el cociente entre la energía potencial de una molécula en la superficie del Sol y $2/3$ la energía térmica de una molécula del gas en el centro del astro.

Elegidos dos valores para p_c y ρ_c , con lo cual fijamos también T_c , quedan definidas a y b . Luego se integra numéricamente el sistema 5.83, a partir del centro, $x = 0$, con $\Psi = 1$, $q = 0$, hacia afuera $x > 0$, hasta que se obtiene el primer cero de la temperatura, $\theta = 0$, ese punto determina el radio de la estrella $x_e = R/R_O$ y el valor de q_e para esa posición es la masa de la estrella M_e/M_O . La integración produce también las funciones que describen la estructura, densidad, presión, temperatura y masa en función de r . Variando p_c y ρ_c , e iterando el procedimiento podemos construir una tabla de resultados, de manera que dada la masa y el radio de la estrella podemos inmediatamente conocer la densidad y la temperatura en el centro del cuerpo.

El arranque del procedimiento numérico no se hace a partir de $x = 0$, sino de una posición cercana, digamos $x = 0.01$, porque para $x = 0$ tenemos una división por cero en 5.83. Buscamos analíticamente una solución para $x^2 \ll 1$, suponemos que en primera aproximación $\psi = 1$ e integramos la ecuación para q

$$\frac{dq}{dx} = ax^2, \quad q \approx \frac{1}{3}ax^3. \quad (5.86)$$

Ahora podemos integrar la ecuación para ψ

$$\frac{d\psi}{dx} = -b\frac{ax}{3}, \quad \psi \approx 1 - b\frac{ax^2}{6}. \quad (5.87)$$

Se puede mejorar la aproximación, iterando el procedimiento, pero no es necesario. Para evitar la división por cero alcanza con poner el punto de partida de la integración en $x = 0.01$ con los siguientes valores iniciales

$$q_{01} \approx 3.33333 \times 10^{-7} \times a, \quad \psi_{01} \approx 1 - 1.66667 \times 10^{-5} \times ab. \quad (5.88)$$

La siguiente figura ilustra un resultado obtenido integrando con el método de Runge-Kutta. El lector puede hacer otras integraciones mediante Matlab, empleando el programa descrito en el ejercicio 5.8. El modelo fue integrado con $n = 5/3$, $a = 20$ y $b = 1.7$, como se ve por el tercer panel el radio de la estrella es aproximadamente un radio solar y la masa dada en el segundo panel es alrededor de 1.1 masas solares. Por lo tanto, suponiendo que la masa gaseosa está compuesta por hidrógeno, las condiciones del centro son

$$\rho_c = 1.592 \times \frac{M_O}{R_O^3}, \quad T_c = 0.5882 \times G \frac{M_O m_H}{R_O k}. \quad (5.89)$$

Las constantes físicas y los parámetros astronómicos valen

$$\begin{aligned} G &= 6.67 \times 10^{-8} \text{ dinas cm}^2/\text{gm}^2, & m_H &= 1.672 \times 10^{-24} \text{ gm}, \\ k &= 1.379 \times 10^{-16} \text{ erg/}^\circ\text{K}, & M_O &= 1.985 \times 10^{33} \text{ gm}, & R_O &= 6.951 \times 10^{10} \text{ cm}. \end{aligned} \quad (5.90)$$

El resultado es $\rho_c = 9.41 \text{ gm/cm}^3$, algo menos que diez veces la densidad del agua, mientras que $T_c = 1.36 \times 10^7 \text{ }^\circ\text{K}$, cuyo orden de magnitud es similar al que estiman las teorías actuales para una estrella como el Sol. La temperatura central obtenida es del orden del Kev en unidades energéticas, suficiente para encender las reacciones nucleares de fusión a partir del hidrógeno.

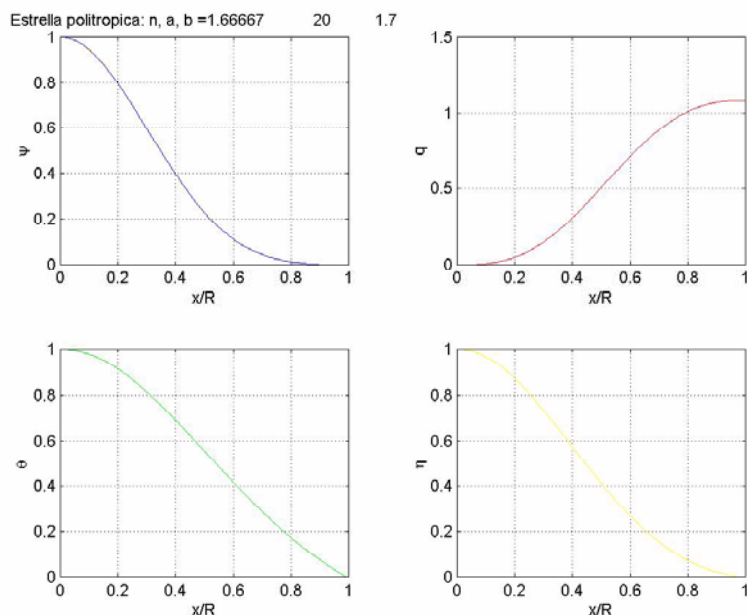


Figura 2 Soluciones del equilibrio de una estrella politrópica (ver texto).

5.9 Ejercicios del capítulo 5

Ejercicio 5.1 Un cuerpo completamente sumergido en el mar está configurado como un cilindro alargado que tiene la sección con forma de letra D tumbada, con la parte recta en horizontal. El cuerpo tiene peso específico κ_C , menor que el peso específico del agua, κ y yace sobre un fondo plano del mar. Hay buen contacto entre la parte plana de la sección y el fondo, de modo que no circula agua debajo del cuerpo. (a) Calcular la fuerza de flotación para esta configuración. (b) Examinar que ocurre con el cuerpo: ¿emerge o se queda en el fondo? ¿se contradice el principio de Arquímedes, 5.23?

Ejercicio 5.2 Considere un cuerpo flotante en la superficie de un líquido en reposo. El cuerpo está parcialmente sumergido. Extender el principio de Arquímedes para este caso. Calcular el empuje y escribir la ecuación que permite calcular el centro de aplicación del empuje. Discutir las condiciones de equilibrio. (a) Calcular el empuje de flotación y su punto de aplicación o metacentro. (b) Realizar el cálculo del metacentro para el caso particular de una esfera homogénea y para un prisma homogéneo de sección rectangular. (c) ¿Cómo flota un prisma de madera de sección cuadrada? ¿Sobre un lado o de punta sobre un vértice? Depende del cociente de densidades madera vs. líquido: discutido por W.P., Reid, "Floating of a long square bar", *American Journal of Physics*, **31**, 565 (1963).

Ejercicio 5.3 Un recipiente cilíndrico de altura L y radio a contiene un líquido hasta la altura $h_0 < L$. Se pone en rotación líquido y recipiente juntos, con velocidad angular Ω , hasta que el líquido gira como un cuerpo rígido (es la viscosidad del líquido lo que permite que se llegue a esta configuración). (a) Alcanzado el equilibrio rotante, determinar la forma de la superficie libre. (b) ¿Cuál es la velocidad angular Ω_1 para que el líquido comience a derramar? (c) ¿Cuanto vale la velocidad angular Ω_2 necesaria para que el líquido comience a dejar libre el fondo del recipiente? Suponga que no hay derrames y examine la relación entre h_0 y L para que eso no ocurra.

Ejercicio 5.4 Sea la configuración de equilibrio del ejercicio anterior. Considere un cuerpo completamente sumergido y rodeado por el líquido. Estudiar la extensión del

principio de Arquímedes para este caso. Discuta la condición de equilibrio para el cuerpo sumergido.

Ejercicio 5.5 La misma configuración de los precedentes ejercicios 5.3 y 5.4. Considere una esfera flotando en la superficie libre: es un cuerpo parcialmente sumergido. Examinar cualitativamente las fuerzas que actúan sobre la esfera y su punto de aplicación. Discutir la condición de equilibrio para la esfera flotante.

Ejercicio 5.6 Sea un planeta con masa M , forma esférica con radio R , rotante con velocidad angular, Ω , alrededor del eje z , completamente rodeado por un delgado estrato de agua de espesor $\delta = \delta(\theta)$, de manera que en coordenadas esféricas r, θ, φ , la superficie libre está dada por la ecuación $r = R + \delta(\theta)$, siendo $\delta/R \ll 1$. (a) Determinar la forma de la superficie libre y obtener la diferencia de profundidad del agua Δ entre el ecuador y el polo. (b) Reemplazar valores numéricos de M, R, Ω correspondientes al planeta Tierra y calcule Δ . Comentar el resultado.

Ejercicio 5.7 La misma configuración planetaria del ejercicio precedente, pero en este caso no hay estrato líquido sino una atmósfera gaseosa, la cual supondremos en equilibrio politrópico con índice n . (a) Obtener la forma de la atmósfera $\delta = \delta(\theta)$, siendo δ la altura para la cual $p = 0$ y suponiendo que $\delta/R \ll 1$ calcular Δ la diferencia de alturas de atmósfera entre el ecuador y el polo. (b) Reemplazar valores numéricos correspondientes al planeta Tierra y discutir resultados para los casos $n = 1.2$ (equilibrio convectivo con humedad) y $n = 1.4$ (equilibrio adiabático).

Ejercicio 5.8 El siguiente archivo *script* "esfpolit.m" de Matlab calcula y grafica soluciones de la estructura interna de estrellas en equilibrio politrópico.

```
% esfpolit.m - script file para integrar esferas gaseosas politrópicas autogravitantes.
% Llama la función estrella.m
% Los datos iniciales son:  $a = 3 \times$  (densidad en el centro/densidad media del Sol)
% y  $b =$  (energía potencial de una molécula en superficie del Sol)/((2/3) energía
% térmica de una molécula en el centro).
% Las variables principales son psi y q (presión y masa, respectivamente),
% magnitudes derivadas son theta y eta, temperatura y densidad, respectivamente.
% Todas las variables están en unidades astronómicas, empleando la masa y el
radio
% del Sol. También hay que dar  $n$ : el índice politrópico.
% Para cambiar de estrella editar la primera línea.
 $a = 20$ ;  $b = 1.6667$ ;  $n = 5/3$ ; % datos de inicio; editar
global ppaarr
 $nu = 1/n$ ;
 $ppaarr = [n \ a \ b]$ ; % parametros
% desarrollo en el centro: necesario para evitar la singularidad de las EDOs en
 $x=0$ .
 $x0=0.01$ ;
 $y01=1-(a*b*x0^2)/6$ ;
 $y02=(a*x0^3)/3$ ;
 $y0=[y01; y02]$ ; % valores iniciales
% xspan: define el intervalo de integración; dejar  $xspan(1)=0.01$  fijo en todas las
integraciones;
% editar y modificar  $xspan(2)$  hasta obtener el primer cero de theta, punto que
define el radio  $x_e$ 
% y la masa total  $q_e$ , de la estrella (en unidad del radio y la masa del Sol,
respectivamente).
% Al final, calcular también la temperatura, la presión y la densidad, en el centro
```

```

% (en grados Kelvin, Atmósferas y gm/cm3, respectivamente)
xspan=[0.01 1.0];
options=odeset('RelTol',1e-7, 'AbsTol', [1e-7 1e-7]); % define la precision
% para integrar las EDOs
[x,y]=ode45('estrella',xspan,y0,options); % integracion de la estrella
Y1=y(:,1); % psi
Y2=y(:,2); % q
Y4=(Y1.^nu); % eta
Y3=(Y1.^(1-nu)); % theta
% rutina de graficación
subplot(2,2,1)
plot(x,Y1,'b-'), grid, xlabel('x/R'), ...
ylabel('\psi');
title(['Estrella politropica. \eta_0, \psi_0, \Gamma =', num2str(par)]);
subplot(2,2,2)
plot(x,Y2,'r-'), grid, xlabel('x/R'), ...
ylabel('q');
subplot(2,2,3)
plot(x,Y3,'g-'), grid, xlabel('x/R'), ...
ylabel('\theta');
subplot(2,2,4)
plot(x,Y4,'y-'), grid, xlabel('x/R'), ...
ylabel('\eta');
% opcional: editar figura y textos con los comandos de barra, antes de imprimir.
% colocar el siguiente archivo function "estrella.m" en el camino de busqueda de

```

Matlab

```

% estrella.m: ecuaciones diferenciales de esferas politropicas autogravitantes
% se controla con el script file: esfpolit.m
function yp=estrella(x, y);
global ppaarr
n=ppaarr(1); a=ppaarr(2); nu=1/n; b=ppaarr(3); F=y(1)^nu; xq=x^2;
yp1=-y(2)*F*b/xq;
yp2=F*xq*a;
yp=[yp1;yp2];

```