2. MAGNITUDES FÍSICAS

Cuando la física estudia algún aspecto de la naturaleza lo primero que hace es deslindar lo más claramente posible cuál es la parte de la naturaleza que le interesa, separándola del resto. La parte que está bajo estudio se llama *sistema*. Qué es lo que *forma parte* del sistema y qué es lo que *no* lo integra es una cuestión que se debe decidir claramente desde el comienzo. Esta decisión está librada al criterio del estudioso y es en gran medida arbitraria. Aunque muchas veces se toma por razones prácticas o de conveniencia, una decisión *juiciosa* sobre esta cuestión es fundamental para que el tratamiento sea sencillo y a la vez útil. Como veremos, en muchos casos la definición del sistema queda *implícita* ya que es bastante obvia, pero esto no debe llevar al lector a creer que el tema se pueda soslayar: una afirmación puede ser cierta o falsa según como se haya definido al sistema. Por ejemplo si afirmamos que al chocar una bocha contra otra se conserva la energía mecánica, tal afirmación es *cierta*[1] si se entiende que el sistema (cuya energía mecánica decimos que se conserva) es el conjunto de las dos bochas, pero es *falsa* si se considera que el sistema está formado por la primera (o la segunda) de las bochas.

Al estudiar un sistema físico estamos interesados en una o varias de sus características, a las que denominamos sus *propiedades* físicas, cuya descripción se hace en términos de lo que llamamos *magnitudes*. Por ejemplo si el sistema que consideramos es un gas encerrado en un recipiente las magnitudes físicas que lo describen serán la presión p del gas, el volumen V que ocupa, su cantidad (o sea su masa m, o bien el número n de moles), su temperatura T, etc.

El objeto de las *leyes* físicas es establecer relaciones entre las magnitudes que caracterizan al sistema, de modo tal que conocidos los valores de algunas de ellas se puedan calcular o predecir los valores de las otras y su evolución con el correr del tiempo. En el caso de un gas en un recipiente citado antes, p, V, T y n están relacionadas, en el equilibrio, por medio de la fórmula aproximada

$$pV = nRT \tag{2.1}$$

donde R es una constante universal[2]. Esta fórmula expresa una ley física[3], llamada *ecuación de estado* de los gases ideales. Otro ejemplo de ley física es la ley del resorte (ec. (1.1)) que presentamos en el Capítulo anterior y más adelante se verán muchas otras. La Física es una ciencia experimental y esto quiere decir que sus leyes se obtienen de la observación y la experimentación. Fue por medio de la experimentación que se encontraron las leyes que se acaban de mencionar.

Las leyes que rigen el comportamiento de sistemas complejos son lógicamente complicadas, lo que hace difícil la tarea del físico. Sin embargo hay una estrategia extraordinariamente útil y fructífera que permite atacar estas dificultades. Consiste en *dividir* un sistema complejo en partes más *simples*, estudiar cada parte por separado, y *deducir* las propiedades del conjunto a partir de las propiedades de las partes que lo componen y de sus interacciones. Por ejemplo, si se consi-

---

[1] Con buena aproximación.

[2] La *constante universal de los gases*, cuyo valor es de 8.3143 joule/˚K (el significado de las unidades joule y ˚K se verá más adelante).

[3] Notar que hemos definido el significado de los símbolos que figuran en la (2.1). Si no se hiciera esto la fórmula carecería de contenido físico.

dera el gas de antes como un conjunto de moléculas, se puede *deducir* la ley (2.1) a partir de las propiedades de las moléculas[4].

La importancia de este enfoque no es sólo práctica (porque permite abordar problemas que se presentan como sumamente complicados) sino también conceptual, ya que permite una enorme *síntesis* del conocimiento porque condensa *muchas* leyes y relaciones en *pocas* leyes más fundamentales referidas a sistemas simples, a partir de las cuales se deducen todas las demás mediante procedimientos lógicos y aplicando fórmulas matemáticas. Se tiene así una poderosa herramienta que permite atacar un número muy grande de problemas. Eso es lo que estudiaremos en estas páginas.

Vemos así que los elementos básicos con que trabaja el físico para construir su estructura de leyes son las magnitudes físicas. Las magnitudes físicas son los datos que vienen de la observación y la experiencia. De lo dicho se desprende que el concepto de magnitud está íntimamente relacionado con la idea de *medición*. Más precisamente, una magnitud física queda definida cuando se conocen las *prescripciones para medirla*, es decir asociarle valores numéricos comparándola con otra de la misma clase tomada como *unidad*. Por ejemplo la longitud (de un objeto) es una magnitud que queda definida cuando se especifica el procedimiento a seguir para medirla. Este procedimiento puede ser, verbigracia, comparar la longitud en cuestión con una regla graduada y contar cuántas veces la unidad en que está dividida la regla entra en la longitud que se está midiendo.

Unidades y dimensiones de las magnitudes físicas

De lo expuesto debe quedar claro que hay muchas clases de magnitudes físicas, caracterizadas de diferente manera. Algunas de ellas se pueden comparar entre sí: por ejemplo todas las longitudes se pueden medir con una regla (por lo menos en principio) y se pueden expresar en términos de la misma unidad. Se dice entonces que tienen la misma *dimensión*, que en este caso es la dimensión de *longitud* y se indica con el símbolo de longitud ℓ encerrado entre corchetes:

$$[\ell] \equiv \text{ dimensión de longitud} \qquad (2.2).$$

La *unidad* de longitud, es decir la unidad en la que se expresan las medidas de longitud queda a elección del físico: puede ser el centímetro (cm), el metro (m), o cualquier otra que resulte conveniente según el caso.

Si consideramos ahora otra magnitud como la *superficie* o el *área* de un objeto, vemos que un área no se puede comparar con una longitud[5]. Se trata en este caso de magnitudes de dimensiones *diferentes*. Sin embargo hay una relación de carácter *geométrico* entre ambos conceptos, ya que podemos medir un área viendo cuantas veces entra en ella un área unidad definida (por ejemplo) como un cuadrado cuyos lados miden una unidad de longitud. Así es que un área se puede medir en centímetros cuadrados o metros cuadrados. Esto se expresa diciendo que las dimensiones de área son

$$[\text{área}] = [\ell \times \ell] = [\ell^2] \qquad (2.3)$$

[4] Esto se verá más adelante.

[5] Es decir, no se puede medir un área con una regla, pues para medirla es preciso compararla con otra área.

En general entre las dimensiones de magnitudes físicas de diferente dimensionalidad se pueden establecer relaciones que expresan las dimensiones de una magnitud en términos de las dimensiones de otras, de manera análoga a la que establecimos en la (2.3) entre las dimensiones de área y de longitud. Según su origen hay relaciones dimensionales que provienen de:

- *Relaciones geométricas* como la que ya vimos entre área y longitud. También es de esta clase la relación entre las dimensiones de volumen y de longitud:

$$[\text{volumen}] \equiv [V] = [\ell \times \ell \times \ell] = [\ell^3] \tag{2.4}$$

- *Definiciones*. Podemos definir la densidad de un cuerpo (que indicamos con ρ) como el cociente entre su masa m y su volumen V, esto es $\rho = m/V$. De esta definición resulta que

$$[\rho] = [m]/[V] = [m/\ell^3]. \tag{2.4}$$

  Si elegimos el gramo (g) y el centímetro (cm) como unidades de masa y de longitud la unidad de densidad es el g/cm^3 y la densidad se expresa en gramos por centímetro cúbico.
- *Leyes físicas*. De la ley del resorte $F = kx$ (ec. (1.1)) surge una relación dimensional entre las magnitudes F, k, x. De la misma se obtiene que las dimensiones de k son

$$[k] = [F]/[\ell] = [F\ell^{-1}] \tag{2.5}$$

  o sea son las de fuerza dividida por longitud. Si la fuerza se mide en kilogramos-fuerza (kgf), y x en cm, k se medirá en kilogramos-fuerza/cm. De manera análoga a partir de otras leyes se pueden también deducir relaciones dimensionales.

Debido a las relaciones dimensionales entre diferentes magnitudes físicas se suele decir que algunas de ellas son *fundamentales* y otras *derivadas*, porque se pueden expresar dimensionalmente en términos de las primeras. Correspondientemente las respectivas unidades se dicen fundamentales en un caso y derivadas en el otro. Así, por ejemplo, la longitud es fundamental y el área derivada. Sin embargo se debe notar que esta distinción es totalmente *arbitraria,* ya que no hay ninguna razón de principio para considerar que una magnitud es más fundamental que otra. Con igual derecho se podría haber procedido al revés, tomado el área como fundamental y la longitud como derivada.

Es práctico sin embargo fijar alguna convención, tomando ciertas magnitudes y sus unidades como fundamentales y considerar las demás como derivadas. Estas convenciones dan lugar a los diferentes *sistemas de unidades* que se emplean en la física. Los sistemas más usados (y que nosotros emplearemos) son el sistema cgs (centímetro, gramo, segundo) y el MKS (metro, kilogramo, segundo). Ambos toman como fundamentales la longitud (ℓ), la masa (m) y el tiempo (t) así como sus respectivas dimensiones $[\ell]$, $[m]$, $[t]$ y los resumimos en la Tabla 2.1.

Tabla 2.1. Sistema de unidades.

Magnitudes fundamentales	Unidades	
	cgs	MKS
ℓ	cm	m = 100 cm
m	g	kg = 1000 g
t	s	s

A fin de evitar confusiones (y errores) se debe siempre explicitar el sistema de unidades que se está empleando. Recordemos también que por razones históricas, técnicas y también prácticas, en muchas aplicaciones se emplean unidades que *no pertenecen* a los sistemas antes mencionados. Cuando venga al caso introduciremos esas unidades y daremos su equivalencia en términos de las unidades cgs y MKS.

Magnitudes sin dimensiones

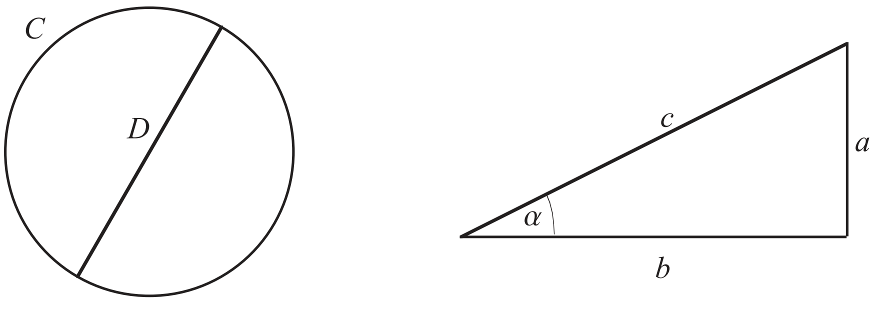
Si se define una nueva magnitud física a partir del cociente entre dos magnitudes de la misma dimensionalidad se obtiene una magnitud *adimensional*, esto es un número puro que no tiene dimensiones (se dice que tiene *dimensión cero*). Claramente las magnitudes adimensionales tienen el mismo valor en cualquier sistema de unidades. Las magnitudes adimensionales pueden provenir de:

- *Relaciones geométricas*. Un ejemplo de esta clase es la relación entre la circunferencia C y el diámetro D de un círculo (Fig. 2.1a). Evidentemente

$$\frac{C}{D} = \pi = 3.14159... \quad , \quad [\pi] = \frac{[\ell]}{[\ell]} = [0] \tag{2.7}$$

  Como todos saben π es un número puro. Los ángulos son otro ejemplo de magnitudes sin dimensiones. Si a, b son los catetos y c la hipotenusa de un triángulo rectángulo (Fig. 2.1b) y α es el ángulo opuesto a a, se tiene que

$$\alpha = \operatorname{arcsen}(a/c) = \arctan(a/b) \tag{2.8}$$



(a) (b)

Fig. 2.1. Magnitudes sin dimensiones provenientes de relaciones geométricas: (a) $C/D = \pi$, (b) $\alpha = \operatorname{arcsen}(a/c) = \arctan(a/b)$.

- *Relaciones físicas*. Un ejemplo de magnitud física adimensional es el número de Mach $\mathcal{M}$, que juega un rol importante en la aerodinámica. Para un avión que vuela en el aire se define como

$$\mathcal{M} = \frac{\text{velocidad del vuelo del avión}}{\text{velociad del sonido en el aire}} \tag{2.9}$$

Cuando $\mathcal{M} < 1$ tenemos vuelo subsónico mientras que si $\mathcal{M} > 1$ tenemos vuelo supersónico. El problema físico es muy distinto en un caso que en el otro y de resultas de eso los criterios de diseño son diferentes, según si se proyecta el avión para vuelo subsónico o supersónico.

Las magnitudes adimensionales originadas en relaciones físicas tienen gran importancia porque suelen servir como parámetros que determinan regímenes físicos *diferentes*, debido a que dan condiciones para que determinados factores sean o no importantes en el problema. Veremos en estas páginas otros ejemplos de magnitudes adimensionales, entre ellos el número de Reynolds, de gran importancia en la mecánica de fluidos.

Magnitudes extensivas e intensivas

Como ya dijimos es muy común en física considerar a un dado sistema como compuesto de dos o más partes, cada una de las cuales constituye un subsistema. Cada subsistema estará caracterizado por determinadas magnitudes físicas que lo describen. Es importante saber que relación hay entre las magnitudes físicas correspondientes a los subsistemas y la homóloga magnitud para el sistema compuesto. Se pueden dar aquí dos casos diferentes que permiten clasificar las magnitudes en dos categorías: *extensivas* e *intensivas*.

Las *magnitudes extensivas* se caracterizan porque al integrarse los subsistemas partes para formar el sistema que los engloba, sus valores se *suman*. Un ejemplo de esta clase es el volumen: si $V_1, V_2, V_3, \ldots$ son los volúmenes de los subsistemas $S_1, S_2, S_3, \ldots$, el volumen total del sistema conjunto $S = S_1 + S_2 + S_3 + \ldots$ es

$$V = V_1 + V_2 + V_3 \ldots \tag{2.9}$$

Otras magnitudes extensivas son la masa, la cantidad de movimiento, la energía, etc.

No todas las magnitudes tienen un comportamiento tan simple. Magnitudes como la densidad, la temperatura, la presión, etc. no se obtienen como la suma de los correspondientes valores para los subsistemas de un sistema. Tales magnitudes se llaman *intensivas*.

Propiedades geométricas de las magnitudes físicas

Hay magnitudes físicas que quedan completamente especificadas dando su valor en una unidad conveniente, esto es un *número* (que expresa el valor) y la *unidad* (que expresa la dimensionalidad). Ejemplos de este tipo de magnitudes son: distancia, volumen, masa, temperatura, presión, etc. Las magnitudes que tienen esta propiedad se llaman *escalares* porque tienen las mismas propiedades geométricas que los entes matemáticos del mismo nombre.

Otras magnitudes requieren *datos adicionales* para su especificación completa, además de un valor en la oportuna unidad. Por ejemplo para especificar un *desplazamiento* no basta dar la distancia recorrida, sino que hace falta conocer el punto de partida y la dirección y sentido del mismo. Otro ejemplo es la *velocidad,* que para estar completamente determinada requiere conocer, además de su magnitud, a la dirección y el sentido del movimiento. Magnitudes de este tipo, que tienen las mismas propiedades geométricas y algebraicas que los entes matemáticos denominados vectores, se llaman magnitudes *vectoriales* y se representan mediante vectores.

Con los escalares y los vectores *no* se agotan las posibilidades en lo referente a las propiedades geométricas y algebraicas de las magnitudes físicas. En realidad, escalares y vectores son parte de una clase más amplia de entes matemáticos, llamados *tensores*. Los tensores se caracterizan por su rango que es un número entero que puede valer 0, 1, 2, 3, … etc. Los tensores de rango 0 coinciden con los escalares y los tensores de rango 1 son los vectores, pero también hay tensores de mayor rango[6]. En general las magnitudes físicas se representan matemáticamente mediante tensores y como casos particulares tenemos las magnitudes escalares y vectoriales. Pero hay otras magnitudes cuya representación requiere tensores de mayor rango. Por ejemplo el momento de inercia de un cuerpo rígido y los esfuerzos y deformaciones en un medio continuo, son tensores de rango 2. En estas páginas no haremos uso explícito de los tensores, para mantenernos en un nivel matemático sencillo.

Simetría de escala

La simetría de los sistemas físicos, esto es la propiedad de permanecer sin cambios cuando se realizan determinadas transformaciones (*invariancia*) tiene importantes consecuencias que se traducen en la conservación de determinadas magnitudes. Del punto de vista práctico esto facilita la solución de ciertos problemas. Por ejemplo la homogeneidad del espacio implica que un sistema aislado es invariante bajo *traslaciones* y debido a ello se conserva la cantidad de movimiento del sistema; este hecho simplifica el estudio del movimiento de un conjunto de partículas que interactúan, porque se puede analizar el movimiento del centro de masa independientemente del movimiento de las partículas con respecto de dicho centro[7]. De manera semejante la isotropía del espacio implica que un sistema aislado es invariante bajo *rotaciones* y en consecuencia se conserva su momento angular; es bien sabido que esta circunstancia simplifica el estudio del movimiento planetario[8]. Se podrían citar otros ejemplos y todos ellos nos enseñan que el análisis de las propiedades de simetría es un auxiliar poderoso en el estudio de los fenómenos físicos.

Las simetrías que acabamos de mencionar se originan en propiedades *geométricas*, tanto generales del espacio-tiempo como propias de los sistemas mismos. Pero no todas las simetrías que aparecen en la Física son puramente geométricas. En efecto, como se acaba de ver las magnitudes físicas se caracterizan por tener *dimensiones*, además de atributos geométricos. Debido a este hecho los sistemas físicos tienen simetrías que provienen de que la elección de las unidades de medida es *arbitraria* y no guarda relación con la *sustancia* de los fenómenos. Esta es la esencia de la *simetría de escala*, cuya manifestación consiste en que la descripción de los fenómenos físicos debe ser *invariante* respecto de cambios en las unidades de medida, o lo que es equivalente, frente a *cambios de escala* de las magnitudes mismas. Presentaremos ahora el concepto de simetría de escala en forma simple e intuitiva y analizaremos algunas de sus consecuencias.

Semejanza geométrica

La *semejanza* en la física es una generalización de la semejanza geométrica. Comenzaremos recordando este concepto y luego nos referiremos a la semejanza física. En su forma más simple, la noción de semejanza geométrica se expresa diciendo que dos figuras son *semejantes* si las razones entre todas las correspondientes longitudes son idénticas. Es así que los polígonos de la Figura 2.2 son semejantes, ya que

$$\frac{l_1'}{l_1} = \frac{l_2'}{l_2} = \ldots = r \tag{2.11}$$

---

[6] En el Apéndice 2 se resumen las principales propiedades de escalares y vectores. El lector que quiera conocer más puede consultar el excelente libro de L. Santaló *Vectores y tensores con sus aplicaciones* (EUDEBA 1976).

[7] Ver el Capítulo 8.

[8] Esto se verá en el Capítulo 7.

La razón r se llama razón de semejanza, factor de escala, o simplemente *escala*.

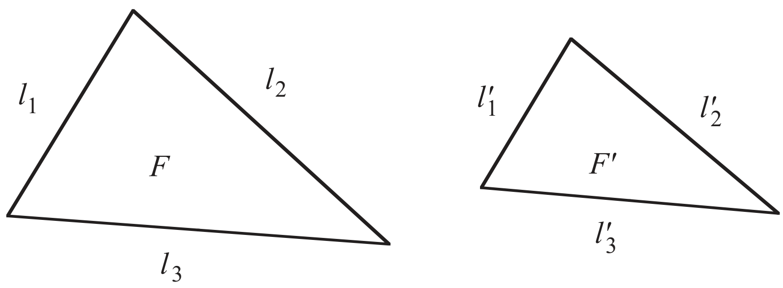


Fig. 2.2. Dos polígonos semejantes.

Una transformación de semejanza entre las figuras F y F':

$$F \Rightarrow F' \tag{2.12}$$

se efectúa mediante un cambio de escala de la forma

$$l_1' = rl_1 \,, \quad l_2' = rl_2 \,, \ldots \tag{2.13}$$

o sea, todas las longitudes l_i' de F' se obtienen multiplicando las correspondientes longitudes l_i de F por el factor de escala r.

Un concepto relacionado pero más general es el de la semejanza afín, o *afinidad*. Se habla de afinidad cuando existe semejanza, pero referida sólo a *un* particular sistema de parámetros.

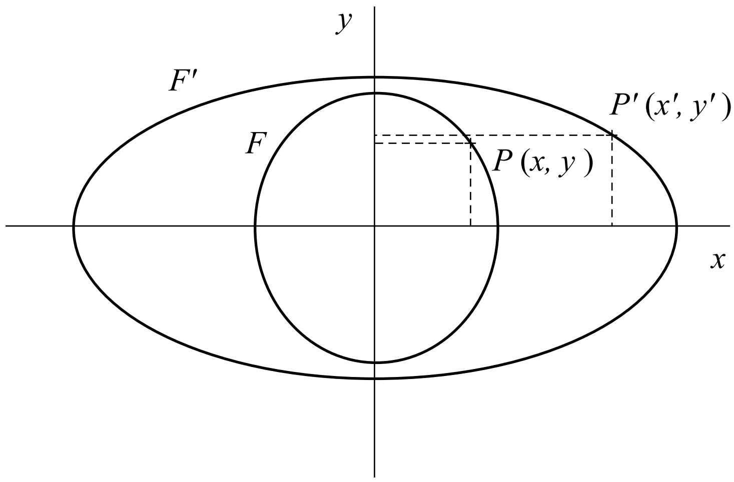


Fig. 2.3. Dos elipses son afines.

Veamos un ejemplo. Supongamos haber elegido en el plano de la Fig. 2.3 un particular sistema de ejes cartesianos (x, y). Si $P \equiv (x, y)$ es un punto de una figura F, y $P' \equiv (x', y')$ es el correspondiente punto P' de la figura F', se dice que F y F' son afines (o que tienen semejanza afín) si se cumple que

$$\frac{x'}{x} = r_x = \text{cte.}_x \,, \quad \frac{y'}{y} = r_y = \text{cte.}_y \tag{2.14}$$

para todo par de puntos correspondientes de F y F'. Se ve de la Fig. 2.3 que todo par de elipses es afín si las referimos a un sistema de ejes con origen en el centro de las figuras y orientados a

lo largo de sus semiejes. Esta elección respecto de la cual se define la afinidad es el particular sistema de parámetros al que nos referíamos antes. Recordemos que un método sencillo para construir elipses se basa precisamente en la afinidad entre la elipse y el círculo.
Un importante concepto relacionado con toda clase de transformaciones (y en particular con las de semejanza y afinidad) es el de *invariante*. Un invariante es una entidad que no cambia si se realiza la transformación (en nuestro caso una semejanza o una afinidad). Por ejemplo:

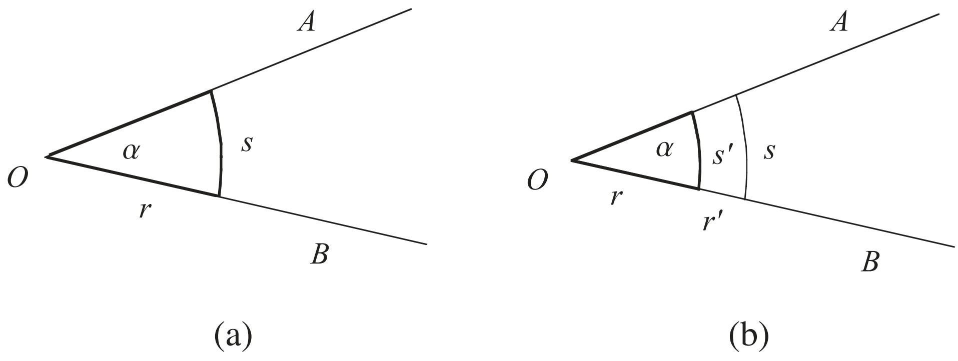


Fig. 2.4. Invariancia de escala de los ángulos.

- Consideremos el ángulo α de vértice O que tiene por lados las semirectas OA y OB (Fig. 2.4a). Sea s el arco de una circunferencia con centro en O y radio r subtendido por α . Realicemos ahora la transformación de semejanza

$$(r,s) \Rightarrow (r',s') \tag{2.15}$$

que hace corresponder a s y r un nuevo arco s' y un nuevo radio r' (Fig. 2.4b). Es evidente que el cociente entre el arco y el radio (el ángulo subtendido por el arco) es un invariante:

$$\alpha = \frac{s}{r} = \frac{s'}{r'} = \text{invariante} \tag{2.16}$$

Luego los ángulos son invariantes de escala. Por otra parte es fácil ver que *no* son invariantes afines.

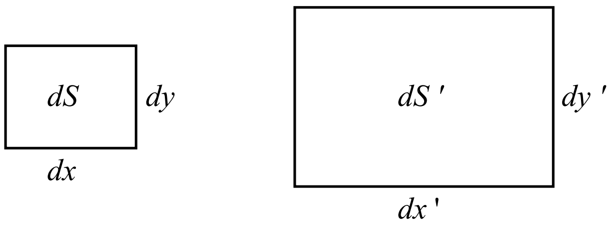


Fig. 2.5. La relación entre el área y las dimensiones lineales.

- Consideremos la relación entre el área y las dimensiones lineales de los elementos rectangulares de la Fig. 2.5. Claramente

$$\sigma = \frac{dS}{dx\,dy} = \frac{dS'}{dx'\,dy'} \tag{2.17}$$

y entonces σ es un invariante de escala, pero en este caso es también un invariante afín.

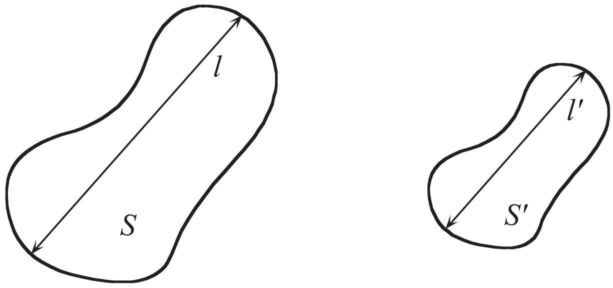


Fig. 2.6. La ley de escala de las áreas.

Leyes de escala

La existencia de invariantes frente a cambios de escala permite obtener *leyes de escala*. Por ejemplo, si S y S' son las superficies de dos figuras semejantes F y F', y si l y l' son dos longitudes correspondientes cualesquiera asociadas a F y F' (Fig. 2.6), tendremos que

$$\frac{S}{l^2} = \frac{S'}{l'^2} = \Pi = \text{invariante} \tag{2.18}$$

y a partir de esta relación obtenemos la ley de escala:

$$S = \Pi l^2 \tag{2.19}$$

que expresa que el área de una figura geométrica cualquiera varía en proporción al cuadrado de las dimensiones lineales de la misma. Aquí Π solo puede depender de otros invariantes que determinan la forma de la figura (para un polígono esos invariantes serán ángulos y cocientes entre las longitudes de los lados).

Como aplicación de la ley de escala de las áreas vamos a obtener el Teorema de Pitágoras y la fórmula que expresa el área de una elipse.

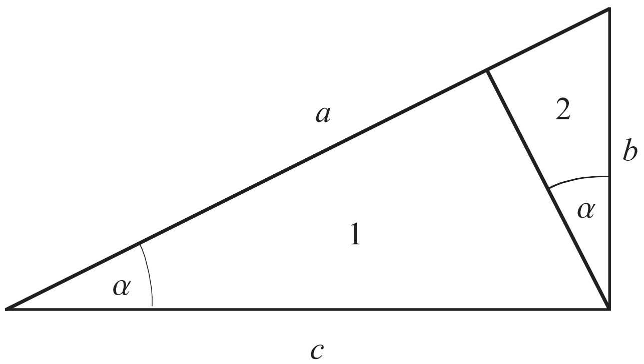


Fig. 2.7. El Teorema de Pitágoras.

Teorema de Pitágoras

Sea el triángulo rectángulo de lados a, b, c de la Fig. 2.7. Bajando la perpendicular a la hipotenusa desde el vértice opuesto lo dividimos en los triángulos 1 y 2. El área del triángulo original es igual a la suma de las áreas de los triángulos 1 y 2:

$$S_{abc} = S_1 + S_2 \tag{2.20}$$

Nótese que los triángulos (abc), 1 y 2 son semejantes. Ahora, en virtud de la (2.19) para todo triángulo rectángulo de hipotenusa h se debe cumplir que $S = \Pi h^2$, donde el invariante Π solo puede depender de otros invariantes que determinan la forma del triángulo rectángulo. Por lo tanto tendremos que $\Pi = f(\alpha)$ donde α indica uno de los ángulos adyacentes a la hipotenusa y entonces $S = f(\alpha)h^2$. Usando esta expresión en la (2.20) resulta

$$f(\alpha)a^2 = f(\alpha)b^2 + f(\alpha)c^2 \tag{2.21}$$

y quitando el factor común se obtiene el resultado buscado:

$$a^2 = b^2 + c^2 \tag{2.22}$$

Dejo como ejercicio para el lector explicar porqué no se puede obtener el mismo resultado si el triángulo no es plano (por ejemplo, si se trata de un triángulo sobre la superficie de la Tierra).

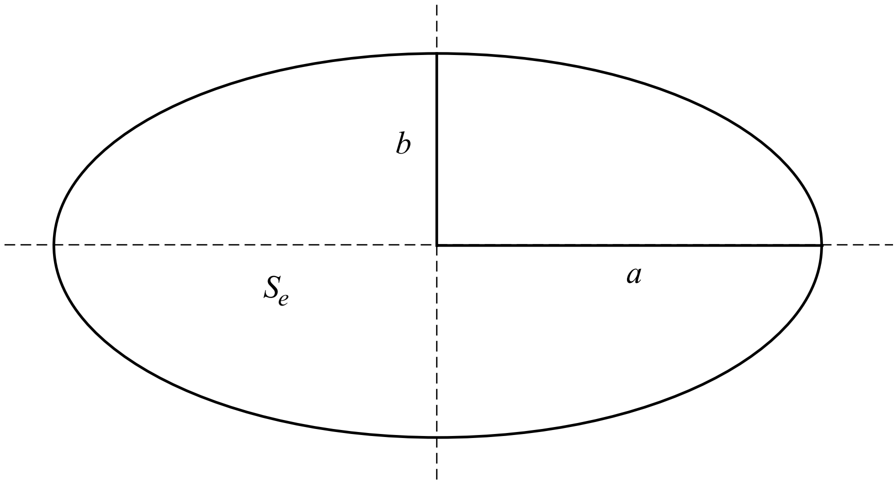


Fig. 2.8. El área de la elipse.

El área de una elipse como consecuencia de la semejanza afín

La Fig. 2.8 muestra una elipse de semiejes a, b, y cuya área es S_e. Por lo dicho antes (ec. (2.17)) la relación

$$\frac{S_e}{ab} = \Pi_e \tag{2.23}$$

es un invariante afín, que en este caso es un número puro pues la elipse queda definida por sus semiejes. Vale entonces la ley de escala $S_e = \Pi_e ab$. Aquí Π_e es el mismo para todas las elipses y por lo tanto se puede determinar de una vez y para siempre usando la que más convenga. En particular el círculo es una elipse cuyos semiejes son iguales. Luego $\Pi_e = \pi = 3.1415926\ldots$ y entonces la fórmula buscada es

$$S_e = \pi ab \tag{2.24}$$

Pasamos ahora a la discusión de la semejanza física.

Semejanza física

La semejanza física es análoga a la semejanza geométrica con la salvedad de que debe tomar en cuenta que las magnitudes físicas se caracterizan por otras dimensiones, además de aquellas de carácter geométrico. Se dice que dos fenómenos físicos son semejantes cuando las características de uno se pueden obtener a partir de las características del otro por medio de un simple cambio de escala[9]. Dicho cambio de escala es análogo a la transformación de un sistema de unidades de medida a otro.

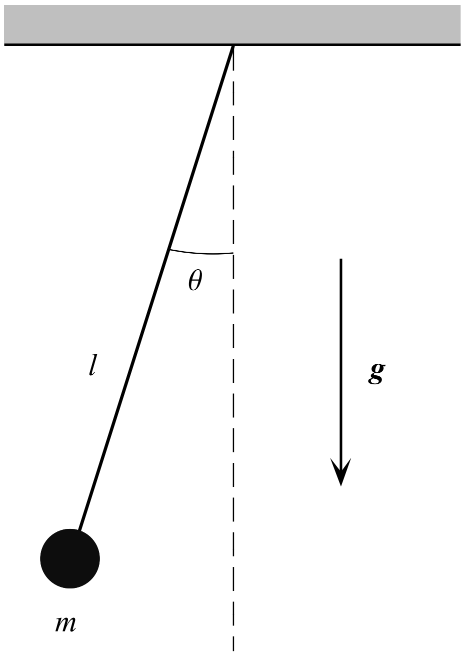


Fig. 2.9 El péndulo.

Nada mejor que estudiar un caso concreto para aclarar la idea de semejanza física. Sea, por ejemplo, el movimiento pendular. Un péndulo simple (Fig. 2.9) es una partícula de masa m suspendida por medio de un hilo inextensible de masa despreciable y longitud l y cuyo otro extremo está fijo. En el Capítulo 6 mostraremos que el movimiento del péndulo está regido por la ecuación

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\operatorname{sen}\theta \tag{2.25}$$

donde θ es el ángulo que forma el péndulo con la vertical y $g \cong 980 \text{ cm/s}^2$ es la aceleración de la gravedad. Se puede observar que la masa del péndulo no interviene[10] en la (2.25).

Veremos que el movimiento del péndulo forma parte de una clase de fenómenos semejantes, lo cual es consecuencia de la invariancia de escala de la ecuación del movimiento (2.25). Dicha

---

[9] Para llevar a cabo la transformación se deben conocer los factores de escala. La semejanza física es la base del empleo de modelos a escala de laboratorio para estudiar el comportamiento de sistemas y dispositivos de gran tamaño.

[10] Que el movimiento del péndulo no dependa de la masa es un hecho experimental cuya razón se verá más adelante.

invariancia se puede verificar explícitamente: si escalamos todas las longitudes por un factor r_l y todos los tiempos por un factor r_t resulta (indicamos con $'$ las magnitudes escaladas) que

$$l' = r_l l, \quad t' = r_t t, \quad \theta' = \theta, \quad g' = r_l r_t^{-2} g \tag{2.26}$$

y sustituyendo en la (2.25) obtenemos

$$\frac{d^2\theta'}{dt'^2} = -\frac{g'}{l'}\operatorname{sen}\theta' \tag{2.27}$$

Puesto que las magnitudes escaladas satisfacen la misma ecuación que aquellas sin escalar la ecuación del movimiento es *invariante*. En consecuencia las características del movimiento de un péndulo se pueden obtener a partir de las características del movimiento de otro péndulo mediante un simple cambio de escala[11].

La simetría de escala queda en evidencia si se escribe la ecuación del movimiento en términos de los invariantes de escala

$$\theta, \quad \tau = t/T, \quad \Pi = T^2 g/l \tag{2.28}$$

donde T es el *período* de la oscilación. Se obtiene entonces

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} = -\Pi \operatorname{sen}\theta \tag{2.29}$$

En esta ecuación solamente figuran invariantes y por lo tanto es manifiestamente invariante.

A partir del invariante Π se obtiene la ley de escala del período $T = (\Pi l/g)^{1/2}$. Aquí Π puede depender tan solo de invariantes constantes y los únicos invariantes constantes del problema son θ_0, la amplitud de la oscilación, y ϕ_0, la fase inicial. Como el período no puede depender de la fase inicial, podemos poner $\Pi^{1/2} = f(\theta_0)$ y resulta

$$T = \sqrt{\frac{l}{g}}\, f(\theta_0) \tag{2.30}$$

Esta ley de escala permite expresar el período en términos de los parámetros del problema, a menos de la función $f(\theta_0)$ cuya forma no conocemos. Se puede notar sin embargo que en el límite de pequeñas oscilaciones ($\theta_0 \to 0$), Π debe ser *independiente* de θ_0 y en consecuencia f debe tender a un valor constante, pero es obvio que dicho valor no se puede deducir mediante consideraciones puramente dimensionales[12].

A partir de este ejemplo podemos hacer algunas generalizaciones que son consecuencia de que la elección del sistema de unidades es arbitraria y no tiene conexión con la sustancia del fenómeno, como dijimos antes:

[11] Nótese que las condiciones iniciales, que no aparecen en la ecuación del movimiento, también se deben incluir entre las características cuya escala se cambia.

[12] El valor de esta constante es $1/2\pi$, como veremos en el Capítulo 6.

- Los invariantes de escala son siempre magnitudes sin dimensiones, cuyo valor es independiente del sistema de unidades elegido. Se construyen combinando las variables, parámetros y constantes físicas del problema.
- Toda relación física correspondiente a un dado problema (ecuaciones de movimiento, condiciones de equilibrio, condiciones iniciales y de contorno, etc.) se puede expresar como una relación entre invariantes de escala.
- Dos fenómenos son semejantes si, y solo si, todas sus variables y parámetros adimensionales tienen los mismos valores numéricos.

El Análisis Dimensional nos permite *generalmente* (existen algunas limitaciones) determinar las combinaciones adimensionales adecuadas a cada problema en particular. El Teorema Pi de Buckingham permite determinar el número de combinaciones adimensionales independientes que se pueden formar a partir de las cantidades dimensionales correspondientes a un problema dado:

> *Teorema Pi*:
>
> Si n es el número de parámetros característicos del problema (constantes o variables), y entre ellos hay k que tienen dimensiones independientes, la cantidad de combinaciones adimensionales independientes que se pueden formar es igual a $n-k$.

La simetría de escala y sus consecuencias son siempre muy útiles. Cuando se conocen las ecuaciones que rigen el problema, los parámetros, variables y constantes se determinan por inspección y son la base para discutir la semejanza, efectuar las consideraciones dimensionales y obtener las leyes de escala. En estos casos la simetría de escala simplifica la investigación al reducir el número de parámetros y al restringir las dependencias funcionales.

A veces es imposible resolver el problema por el proceso de análisis y cálculo debido a dificultades matemáticas demasiado grandes, o a que el problema no se puede formular matemáticamente porque el fenómeno bajo estudio es muy complejo, o, finalmente, porque nuestro conocimiento es incompleto. En estos casos la simetría de escala y las consideraciones dimensionales sirven igualmente, porque permiten investigar el problema mediante modelos a escala o bien porque proporcionan en forma simple y directa respuestas teóricas aproximadas y/o cualitativas. A veces esto puede ser todo lo que se requiere, o que se puede tener la esperanza de obtener. Finalmente, este tipo de análisis sugiere la naturaleza del conocimiento que está faltando y así indica la dirección en que se debe seguir investigando.

La arbitrariedad de la elección de las magnitudes y dimensiones fundamentales

Una característica de la Mecánica Newtoniana es que en su formulación matemática no aparece ninguna constante fundamental propia de la teoría. Por consiguiente todas sus leyes escalan perfectamente ante cambios de magnitud arbitraria de los parámetros. Es usual, aunque no obligatorio, formular la mecánica en términos de tres magnitudes dimensionales: masa (m), longitud (ℓ) y tiempo (t) y esto es lo que hemos supuesto implícitamente en este Capítulo. Cabe observar, sin embargo, que se trata de una elección arbitraria. En efecto, el número de magnitudes se puede aumentar o disminuir. Consideremos por ejemplo la relación (2.4) entre el volumen y la longitud. Esta relación se funda en la ley de escala de origen geométrico $V \sim l^3$ entre el volumen de un cuerpo y sus medidas lineales. A partir de la misma se obtiene la relación dimensional $[V]=[K\ell^3]$ donde K es una constante. Para llegar a la (2.4) hemos elegido $K=1$. Pero con igual derecho podríamos haber hecho una elección diferente, en la cual K difiere de la unidad y tiene dimensiones. De hacer así, nuestra teoría se formularía en términos de cuatro magnitudes (m, ℓ, t y V) en vez de las habituales tres y contendría además la constante dimensional K. Esto es perfectamente legítimo y a los efectos prácticos no altera las conclusiones del análisis dimensional. En particular en el Teorema Pi tendríamos ahora $n' = n + 1$ parámetros característicos (los anteriores más K) y tendríamos entre ellos $k' = k + 1$ que tienen dimensiones independientes pues habría una dimensión independiente más. Pero la cantidad de combinaciones adimensionales en cualquier problema seguiría siendo la misma pues $n' - k' = n - k$. También se puede proceder a la inversa, y disminuir el número de dimensiones (y unidades) fundamentales, suponiendo arbitrariamente que ciertas constantes son adimensionales y su valor es 1. Un ejemplo de este tipo es la convención usada frecuentemente en Mecánica Cuántica que consiste en suponer que la velocidad de la luz en el vacío (c) y la constante de Planck ($\hbar$) son iguales a 1. Con esta elección se tiene que $[l] = [t] = [m^{-1}]$.

Mencionamos estos ejemplos con el único fin de mostrar al lector que el número de dimensiones independientes es arbitrario incluso en la Mecánica Newtoniana, aunque la conveniencia sugiere una determinada elección. En general, cuanto mayor sea el número de dimensiones que se elijan, tanto más grande será el número de unidades independientes que se pueden elegir de manera que su tamaño resulte conveniente a los fines prácticos. Es importante recordar, sin embargo, que cambiar las unidades e incluso el número de dimensiones no afecta el contenido físico de las fórmulas que se obtengan de la teoría, siempre y cuando se las interprete correctamente.

En la mecánica Newtoniana se usa siempre (por convención) el sistema m, ℓ, t, por lo tanto lo que se acaba de comentar no reviste mayor interés. Pero la cuestión es relevante en otras teorías, en cuya formulación aparecen constantes fundamentales. Un ejemplo es el Electromagnetismo, en el cual c figura como constante fundamental de la teoría. En este caso las leyes físicas escalan correctamente sólo si se mantienen constantes las razones entre longitudes y tiempos. En el Electromagnetismo, además, se usan distintos sistemas que difieren en el número de dimensiones fundamentales, que pueden ser tres (m, ℓ, t) como ocurre en el sistema Gaussiano o cuatro como en el sistema MKSI.