

### 3. CINEMÁTICA

La cinemática se ocupa de describir el movimiento sin tomar en cuenta sus causas. El movimiento consiste en el cambio de posición de los objetos con el paso del tiempo y para comenzar conviene aclarar como se especifica la posición de un objeto. Para eso hace falta referirlo a algún otro, por ejemplo al observador. Esto requiere dar varios datos como la *distancia* entre observador y objeto, en que *dirección* se halla éste, la *orientación* del objeto en el espacio, etc.

#### **Objeto puntiforme**

Un punto es el objeto más simple. Como no tiene partes, no tiene sentido hablar de su orientación. Entonces su posición se conoce si se conoce el segmento orientado que va del observador  $O$  al objeto  $A$  (Fig. 3.1a). Basta pues especificar al vector  $\mathbf{r}_{OA}$ , o más brevemente, se puede indicar la posición con  $\mathbf{r}_A$ , dando por sobrentendido el observador. Es útil a veces considerar un sistema de coordenadas cartesianas con origen en  $O$ . En este caso la posición de  $A$  queda determinada por las tres coordenadas  $x_A, y_A, z_A$  que son, naturalmente, las componentes del vector  $\mathbf{r}_A$  en el sistema  $x, y, z$ :

$$\mathbf{r}_A = x_A \hat{\mathbf{x}} + y_A \hat{\mathbf{y}} + z_A \hat{\mathbf{z}} \quad (3.1)$$

siendo  $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}$  vectores unitarios (versores) en la dirección de los ejes (Fig. 3.1b).

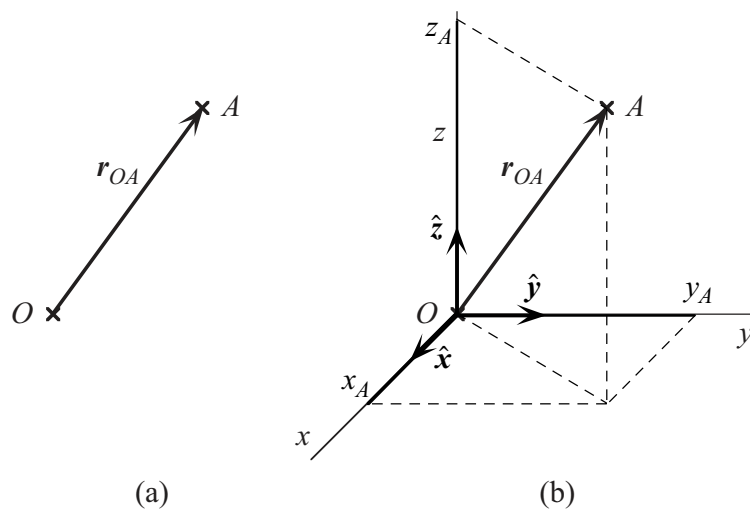


Fig. 3.1. Posición de un objeto puntual: (a) el vector posición, (b) las componentes cartesianas del vector posición.

#### **Objeto extenso y cuerpo rígido**

Si el objeto es extenso el problema se complica. En general podemos suponer que un objeto extenso está constituido por un conjunto de (infinitos) puntos. Luego para conocer su posición necesitaríamos conocer la posición de todos esos (infinitos) puntos. Esto plantea una dificultad seria. Hay dos caminos para avanzar. El más general es el que se emplea en la Mecánica del Continuo (que veremos más adelante). El más simple consiste en usar el modelo de *objeto* (o *cuerpo*) *rígido*. Un objeto rígido tiene la propiedad que la *distancia* entre dos cualesquiera de sus puntos  $A$  y  $B$  es siempre la *misma* cualquiera sea el movimiento del cuerpo (Fig. 3.2.a). No hay en realidad cuerpos perfectamente rígidos en la naturaleza y por eso el “objeto rígido” es un mo-

delo. Pero muchas veces ocurre que las *deformaciones* que sufre el objeto en su movimiento son muy pequeñas y a los fines prácticos despreciables. En ese caso podemos aplicar el modelo sin temor de equivocarnos seriamente. Por ejemplo si estudiamos el movimiento de una piedra que cae la podemos considerar como rígida. Una bola que rueda por un plano inclinado se puede considerar rígida (aunque en realidad sufre deformaciones muy pequeñas).

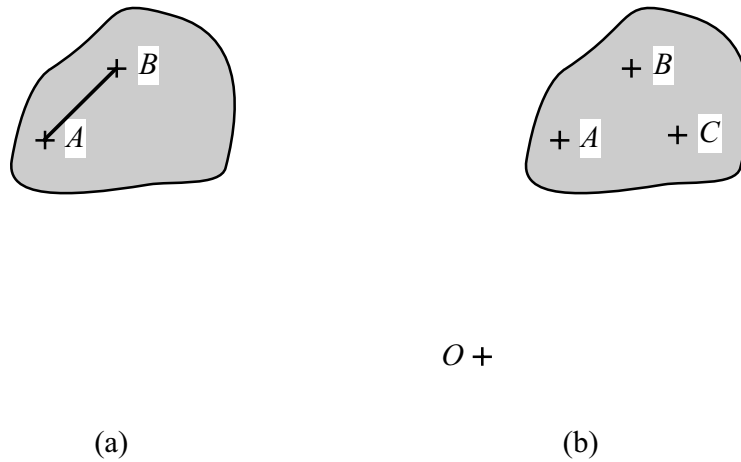


Fig. 3.2. Objeto rígido: (a) la distancia entre dos puntos cualesquiera  $A$  y  $B$  es siempre la misma, (b) tres puntos cualesquiera (no alineados) del cuerpo determinan su posición.

Supongamos que queremos especificar la posición de un cuerpo rígido ¿Cuántos datos hacen falta? Es evidente (Fig. 3.2.b) que la posición del cuerpo queda determinada si se conoce la de tres cualesquiera de sus puntos (con tal que no estén alineados). Podemos entonces proceder del modo que describimos a continuación.

- Comenzamos por determinar la posición de un punto cualquiera  $A$ . Para esto necesitamos conocer  $\mathbf{r}_A = x_A\hat{x} + y_A\hat{y} + z_A\hat{z}$ , o sea *tres* datos.
- Determinamos ahora la posición de otro punto  $B$ ; como  $A$  ya se ha fijado y la distancia de  $A$  a  $B$  es fija (cuerpo rígido) el punto  $B$  no puede estar en cualquier parte: tiene que estar sobre la superficie de una esfera con centro en  $A$  y radio igual a la distancia  $AB$ . Pero sabemos que para fijar la posición de un punto sobre una esfera bastan dos datos (por ejemplo la latitud y la longitud en la Tierra). Luego, conocido  $A$ , la posición de  $B$  queda determinada por *dos* datos (no interesa ahora discutir cuáles son, en general serán dos ángulos).
- Conocida la posición de  $A$  y de  $B$  también está determinada la de todos los puntos de la recta  $AB$  que pasa por ambos. Como las distancias  $AC$  y  $BC$  son fijas la distancia de  $C$  a la recta  $AB$  es también fija. Luego  $C$  se tiene que encontrar en algún punto de una circunferencia con centro en dicha recta. Basta entonces *un* dato más para determinar la posición de  $C$ .

En síntesis se necesitan  $3 + 2 + 1 = 6$  datos para fijar la posición de un cuerpo rígido: la posición de un punto cualquiera  $A$  y tres ángulos que definen la orientación del cuerpo<sup>1</sup>. También se llega al mismo resultado de la siguiente forma: tres puntos  $A, B, C$  no alineados fijan la posición del objeto; la posición de esos puntos requiere conocer  $3 \times 3 = 9$  datos, pero esos datos no son independientes ya que se cumplen las tres condiciones  $AB = \text{cte.}$ ,  $AC = \text{cte.}'$  y  $BC = \text{cte.}''$ . Luego  $9 - 3 = 6$  datos independientes fijan la posición.

<sup>1</sup> Ver el Capítulo 10.

### Grados de libertad y vínculos

Se dice que un cuerpo tiene  $n$  *grados de libertad* si se requieren  $n$  parámetros independientes para fijar su posición. A cada parámetro independiente le corresponde *un* grado de libertad. Cada grado de libertad corresponde a un posible movimiento del cuerpo en el cual varía el parámetro correspondiente a ese grado de libertad. El movimiento más general consistirá en que varíen simultáneamente los parámetros correspondientes a *todos* los grados de libertad. En base a la discusión precedente podemos hacer la siguiente tabla:

Tabla 3.1. Grados de libertad y posibles movimientos.

Objeto:	Grados de libertad:	Movimientos:
Puntiforme	3	traslaciones
Cuerpo rígido	6	traslaciones y rotaciones
Cuerpo deformable	infinitos	traslaciones, rotaciones y deformaciones

Un objeto se mueve cuando su posición varía en el tiempo. El movimiento más general de un objeto puntiforme es una traslación (en tres dimensiones). El movimiento más general de un objeto extenso y rígido es una combinación de traslación y rotación. Sin embargo en muchos casos hay condiciones materiales, denominadas *vínculos*, que limitan los movimientos del objeto. Por ejemplo, una polea está obligada a girar alrededor de un eje fijo. En este caso si el eje es inmóvil la polea tiene un solo grado de libertad.

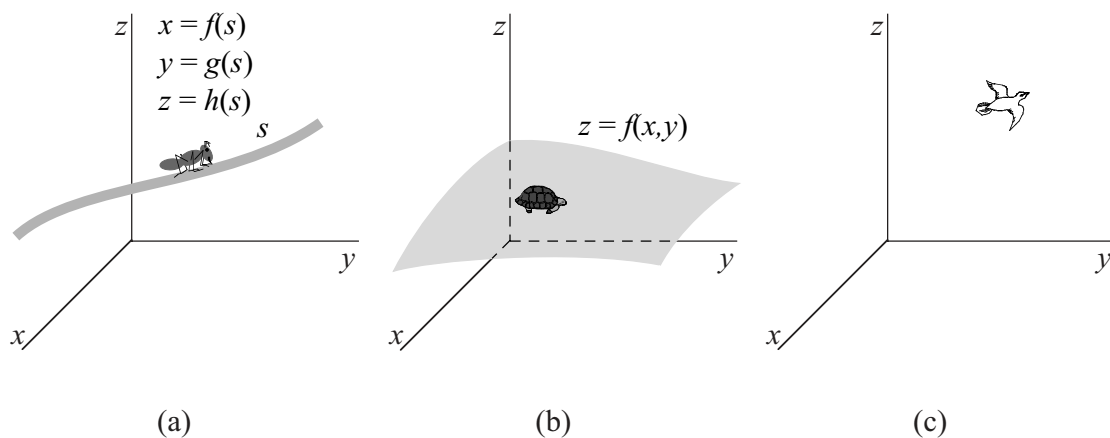


Fig. 3.3. Distintas clases de movimiento: (a) unidimensional, (b) bidimensional, (c) tridimensional.

Consideremos un objeto puntiforme. Cuando el móvil está obligado a desplazarse siguiendo una línea determinada (como una hormiga que camina sobre una cuerda) tendrá *un* grado de libertad y el movimiento se dice *unidimensional* (Fig. 3.3a). En este caso la posición depende de un único parámetro, que puede ser (por caso) la distancia  $s$  medida a lo largo de la línea a partir de un punto elegido como origen. Si el objeto está obligado a moverse sobre una superficie dada sus coordenadas  $x, y, z$  no son independientes, pues se cumple que  $z = z(x, y)$  por estar sobre la superficie. Por eso una tortuga que camina sobre el suelo tiene *dos* grados de libertad (Fig. 3.3b). Decimos en este caso que el movimiento es *bidimensional*. Un ave elige libremente hacia donde volar (Fig. 3.3c) y por lo tanto su movimiento de traslación tiene *tres* grados de libertad.

### Cinemática de los movimientos traslatorios

En lo que queda de este Capítulo consideraremos solamente movimientos de *traslación*<sup>2</sup>. Si no hay vínculos y si no se toman en cuenta las rotaciones del móvil, éste tiene 3 grados de libertad. A los fines prácticos cuando sólo consideramos traslaciones todo objeto se puede considerar puntiforme, *cualquiera sea su tamaño*, a condición de elegir un punto del mismo y estudiar las traslaciones de ese punto. En el caso de un cuerpo extenso que se mueve en *tres* dimensiones (como una piedra que se ha arrojado) conviene elegir el centro de masa o baricentro del mismo, ya que como veremos más adelante la descripción del movimiento del baricentro es más simple que la del movimiento de cualquier otro punto del cuerpo. Si consideramos un movimiento en *una* dimensión, como el desplazamiento de un tren sobre una vía, lo podemos tratar como un objeto puntiforme aunque tiene muchos metros de longitud. La elección del punto representativo es arbitraria ya que todos los puntos del tren tienen un movimiento unidimensional y basta conocer la posición de uno cualquiera de ellos (por ejemplo una marca sobre el paragolpes delantero derecho de la locomotora) para saber donde está ubicado el resto del tren.

#### Trayectoria

Nos interesa estudiar ahora *cómo* se produce el movimiento, cuáles son las *magnitudes* que lo describen y qué *relaciones* hay entre ellas. La primera noción que podemos introducir es la de *trayectoria*. Como estamos estudiando traslaciones trataremos objetos puntiformes (si el móvil es extenso tomaremos en consideración uno de sus puntos). A medida que transcurre el tiempo el móvil ocupa posiciones distintas, de modo que su posición es función del tiempo, es decir

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \quad (3.2)$$

La (3.2) es una ecuación vectorial (equivalente a tres ecuaciones en términos de las componentes de  $\mathbf{r}$ ) que describe la línea que une los puntos por los que pasa el móvil a medida que transcurre el tiempo. Dicha línea<sup>3</sup> se denomina *trayectoria* del móvil.

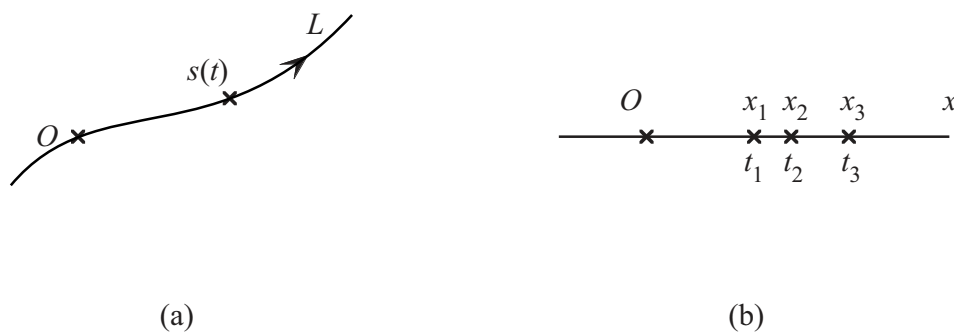


Fig. 3.4. Movimientos unidimensionales: (a) a lo largo de una curva, (b) según una recta.

<sup>2</sup> La cinemática de las rotaciones de un cuerpo rígido se trata en el Capítulo 10.

<sup>3</sup> Atención a no confundir conceptos: todo movimiento sigue una trayectoria pero eso *no* quiere decir que sea unidimensional. El vuelo de una mosca no es un movimiento unidimensional pese a que sigue una línea, porque la mosca va donde quiere: no hay vínculos que la obliguen a seguir una trayectoria determinada. El movimiento es unidimensional sólo cuando el móvil está *obligado* a seguir una línea fijada *de antemano*.

En general la trayectoria de un móvil es una curva en el espacio y puede ser muy complicada. Comenzaremos estudiando las trayectorias más simples que son las que corresponden a movimientos unidimensionales, por ejemplo un movimiento a lo largo de una recta, o a lo largo de una línea determinada como el de un tren a lo largo de la vía (Fig. 3.4a). En este caso la ecuación vectorial (3.2) se reduce a una única ecuación  $s = s(t)$ , donde  $s$  es el arco medido a lo largo de la línea. Para fijar ideas consideraremos movimientos rectilíneos, pero lo que se diga vale para todo movimiento unidimensional.

### Movimiento en una dimensión

La Fig. 3.4b representa sucesivas posiciones de un móvil que se desplaza a lo largo de una recta. Podemos tomar un origen  $O$  y medir en cada instante  $t$  su posición  $x$ . Así  $x_1, x_2, x_3, \dots$  son las posiciones del móvil en  $t_1, t_2, t_3, \dots$ . Esta es una manera de describir el movimiento. Una manera más útil de representarlo es mediante la *línea horaria* (Fig. 3.5a). La línea horaria del móvil es la línea  $x = x(t)$  que representa las sucesivas posiciones que ocupa en función del tiempo.

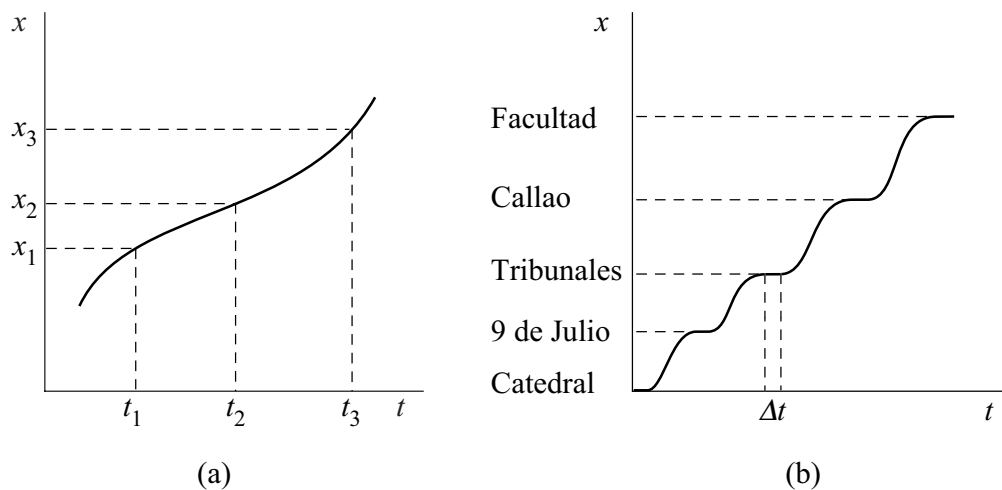


Fig. 3.5. Un móvil que se desplaza a lo largo de una recta: (a) línea horaria que describe el movimiento; (b) línea horaria de un tren subterráneo.

La Fig. 3.5b representa la línea horaria de un tren subterráneo que parte en  $t = 0$  desde Catedral hacia Palermo. Los tramos horizontales donde la posición no cambia durante un intervalo  $\Delta t$  representan los lapsos en que el tren está detenido en las estaciones. A partir del diagrama de líneas horarias podemos apreciar varias propiedades del movimiento, que comentaremos ahora.

### Velocidad

La Fig. 3.6 muestra las líneas horarias de dos móviles que en el instante  $t_1$  estaban ambos en el punto  $x_1$ . El móvil A, que va más ligero, llega a  $x_2$  en  $t_2$ , antes que el móvil B que llega a ese lugar recién en  $t'_2$  ( $t'_2 > t_2$ ). Se ve entonces que cuanto más rápido es el móvil, tanto más empinada es la línea horaria correspondiente, porque emplea menos tiempo en recorrer la misma distancia. Podemos hacer más preciso este concepto definiendo la *velocidad media* como

$$\bar{v}_{12} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (3.3)$$

El subíndice 12 y la barra indican que se trata de la velocidad media en el tramo 12.

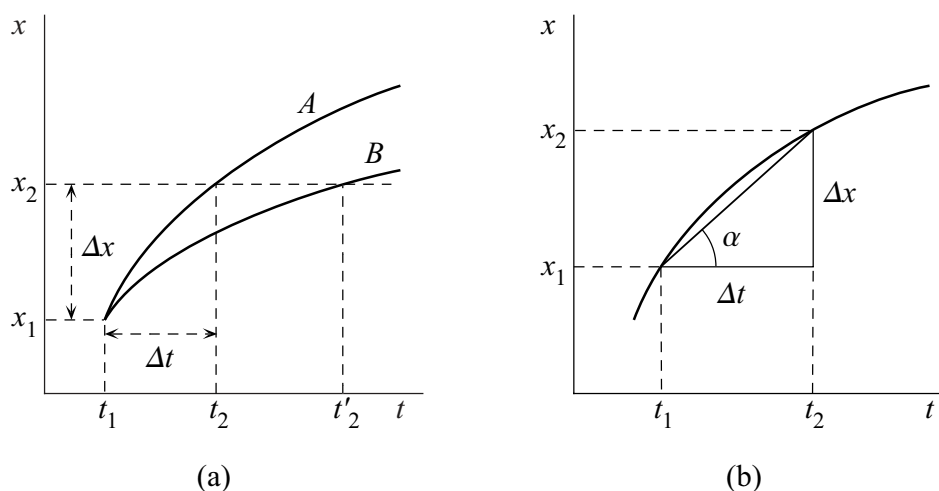


Fig. 3.6. Velocidad media: (a) dos móviles que se desplazan de 1 a 2 con diferentes velocidades medias, (b) obtención gráfica de la velocidad media.

Toda vez que se introduce una magnitud física corresponde especificar sus dimensiones y las unidades en que se mide. Claramente, de la definición (3.3) resulta que

$$[v] = [\ell/t] \quad (3.4)$$

y entonces las unidades de la velocidad serán cm/s en el sistema cgs, o bien m/s en el sistema MKS ( $1 \text{ m/s} = 100 \text{ cm/s}$ ). Cuando se viaja en automóvil es usual medir la velocidad en km/h:

$$1 \text{ km/h} = \frac{1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = 0.2777\dots \text{ m/s} = 27.77\dots \text{ cm/s} \quad (3.5)$$

Los valores de  $\Delta x$  y  $\Delta t$  se pueden obtener del gráfico de la línea horaria si se conocen las *escalas* del mismo. La escala de distancias dirá, por ejemplo, que 1 cm del gráfico representa  $e_x$  cm recorridos, la escala de tiempos dirá que 1 cm del gráfico representa  $e_t$  segundos. Luego

$$\Delta x = e_x \Delta x_g \quad , \quad \Delta t = e_t \Delta t_g \quad (3.6)$$

donde  $\Delta x_g$  y  $\Delta t_g$  son las longitudes en cm de los respectivos segmentos, tal como se miden en el gráfico por medio de una regla (ver Fig. 3.6b). Entonces:

$$\bar{v}_{12} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{e_x \Delta x_g}{e_t \Delta t_g} = \frac{e_x}{e_t} \tan \alpha \sim \tan \alpha \quad (3.7)$$

Luego la velocidad media es *proporcional* a la tangente del ángulo  $\alpha$  que forma la cuerda de la línea horaria con el eje de las abscisas. La velocidad media es un concepto útil como sabe quien viaja y quiere saber cuándo llegará a destino, pero depende de dos posiciones y dos instantes de tiempo ( $x_1$ ,  $x_2$  y  $t_1$ ,  $t_2$ ) y no se relaciona de un modo sencillo con el *tipo* de movimiento. Por ejemplo la Fig. 3.7a muestra tres líneas horarias de 1 a 2 que tienen el mismo valor de  $\bar{v}_{12}$ : (i) describe un móvil que empezó yendo hacia  $x_2$ , se paró, volvió hacia atrás, se paró otra vez y se puso en movimiento muy ligero llegando finalmente a  $x_2$ ; (ii) es un movimiento bastante parejo

de  $x_1$  a  $x_2$ ; (iii) es un movimiento que empezó muy rápido, luego se frenó y recorrió lentamente la última parte del trayecto.

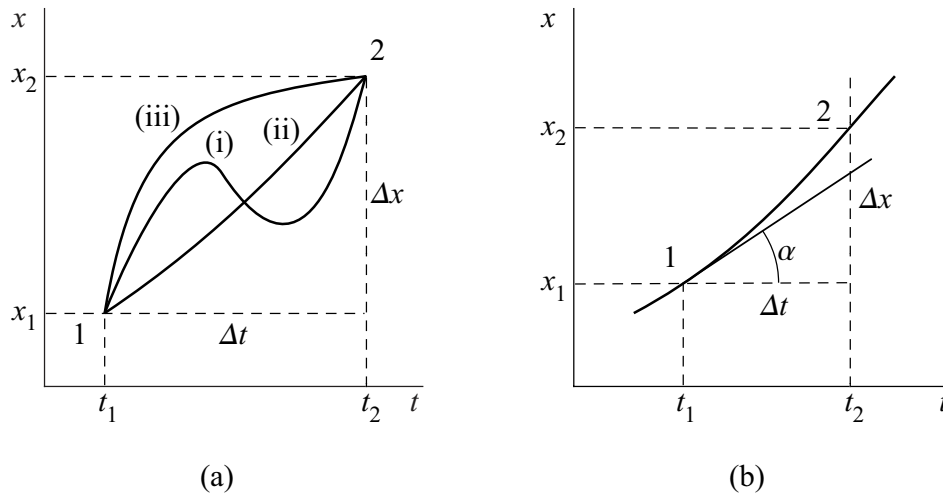


Fig. 3.7. (a) Tres móviles que se desplazan de A a B con igual velocidad media, (b) definición de la velocidad instantánea.

Un concepto mucho más útil es la *velocidad instantánea*. Consideremos la línea horaria  $x = x(t)$  de un móvil. Sea 1 el punto de la misma que corresponde a la posición  $x_1$  que el móvil ocupa en  $t_1$ . (Fig. 3.7b). Si 2 es un punto de la línea horaria próximo a 1, se define como *velocidad instantánea* del móvil en el instante  $t_1$  a

$$v_1 = \lim_{2 \rightarrow 1} \bar{v}_{12} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \left( \frac{dx}{dt} \right)_{t=t_1} \quad (3.8)$$

Si  $\alpha$  es la pendiente de la línea horaria en 1 es evidente que  $v_1 = (e_x / e_t) \tan \alpha$ . En general definiremos la velocidad instantánea como la *derivada* de  $x(t)$  con respecto del tiempo:

$$v = \frac{dx}{dt} \quad (3.9)$$

En lo sucesivo para referirnos a la velocidad instantánea omitiremos el calificativo y hablaremos de *velocidad* a secas. En general  $v$  variará de un punto a otro (en la Fig. 3.7b la pendiente de la línea horaria es diferente en 2 de lo que es en 1, y por lo tanto  $v_2 \neq v_1$ ).

### **Movimiento rectilíneo uniforme**

Un caso muy simple de movimiento rectilíneo es aquél en que la velocidad no varía con el tiempo ( $v = \text{cte.}$ ). La línea horaria de un movimiento rectilíneo uniforme (en lo sucesivo MRU por brevedad) es una recta cuya pendiente es proporcional a  $v$  (Fig. 3.8a) y su ecuación es

$$\frac{x - x_0}{t - t_0} = v \quad (3.10)$$

de donde se tiene que

$$x = x_0 + v(t - t_0) \quad (3.11)$$

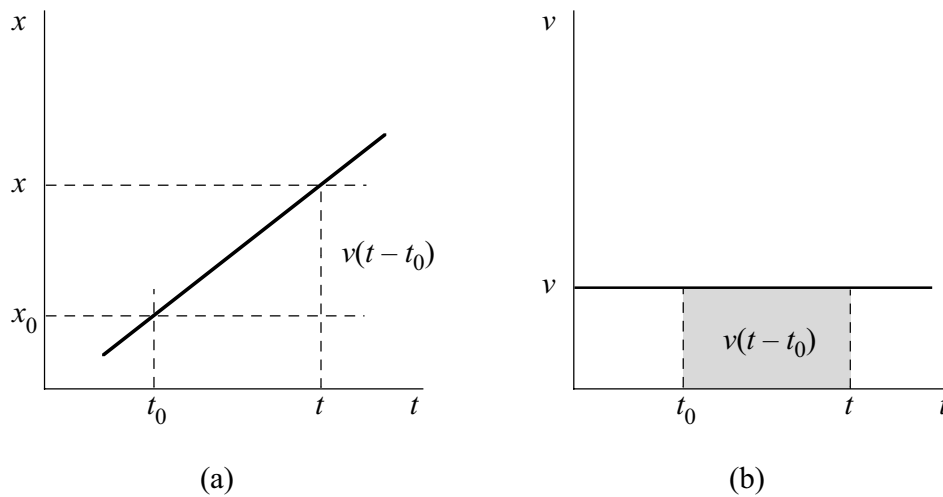


Fig. 3.8. Movimiento rectilíneo uniforme: (a) la línea horaria  $x = x(t)$ , (b)  $v = \text{cte.}$

### Aceleración

Cuando  $v$  varía con  $t$  es útil definir una magnitud que describa esa variación. Análogamente a como definimos la velocidad media y la velocidad instantánea para el caso en que la posición varía con el tiempo podemos definir (Fig. 3.9a) la *aceleración media*  $\bar{a}$  como

$$\bar{a}_{12} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (3.12)$$

y la *aceleración instantánea* (Fig. 3.9b) o *aceleración* (a secas) como

$$a_1 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \left( \frac{dv}{dt} \right)_{t=t_1} \quad (3.13)$$

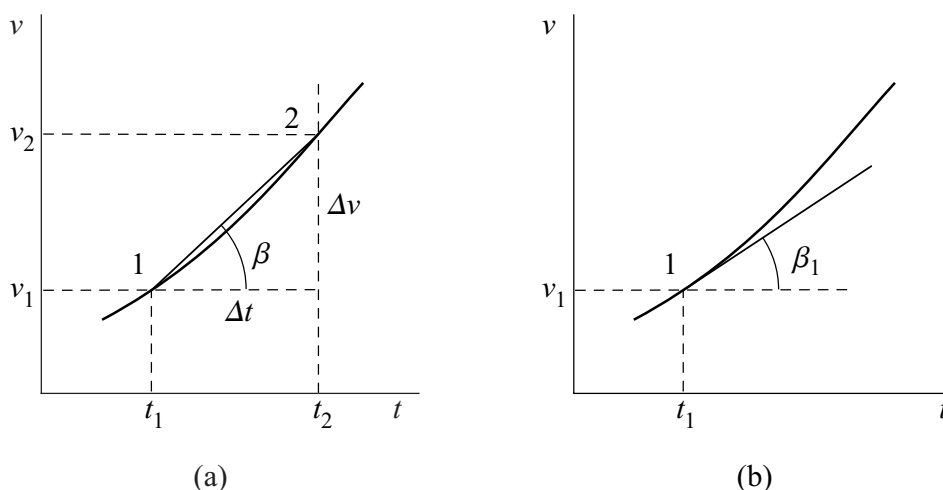


Fig. 3.9. Aceleración: (a) media, (b) instantánea.

En general, definiremos la aceleración como

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \quad (3.14)$$



En el MRU la velocidad es constante y entonces la aceleración es nula en todo momento. De la definición (3.14) podemos obtener las dimensiones de la aceleración como

$$[a] = [v]/[t] = [\ell t^{-2}] \quad (3.15)$$

Las unidades de aceleración serán el  $\text{cm/s}^2$  en el sistema cgs y el  $\text{m/s}^2$  en el sistema MKS. La unidad cgs de aceleración se llama Galileo (abreviado gal) en honor al célebre físico italiano. Naturalmente  $1 \text{ gal} = 1 \text{ cm/s}^2 = 10^{-2} \text{ m/s}^2$ . De la (3.14) resulta  $dv = a dt$ , de donde obtenemos

$$v = v_0 + \int_{t_0}^t a(t') dt' \quad (3.16)$$

donde  $v_0 = v(t_0)$ . El cálculo de la integral requiere conocer la aceleración  $a$  como función del tiempo. Una vez calculada la velocidad podemos obtener la posición ( $x_0 = x(t_0)$ ) como

$$x = x_0 + \int_{t_0}^t v(t') dt' = x_0 + v_0(t - t_0) + \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} a(t'') dt'' \quad (3.17)$$

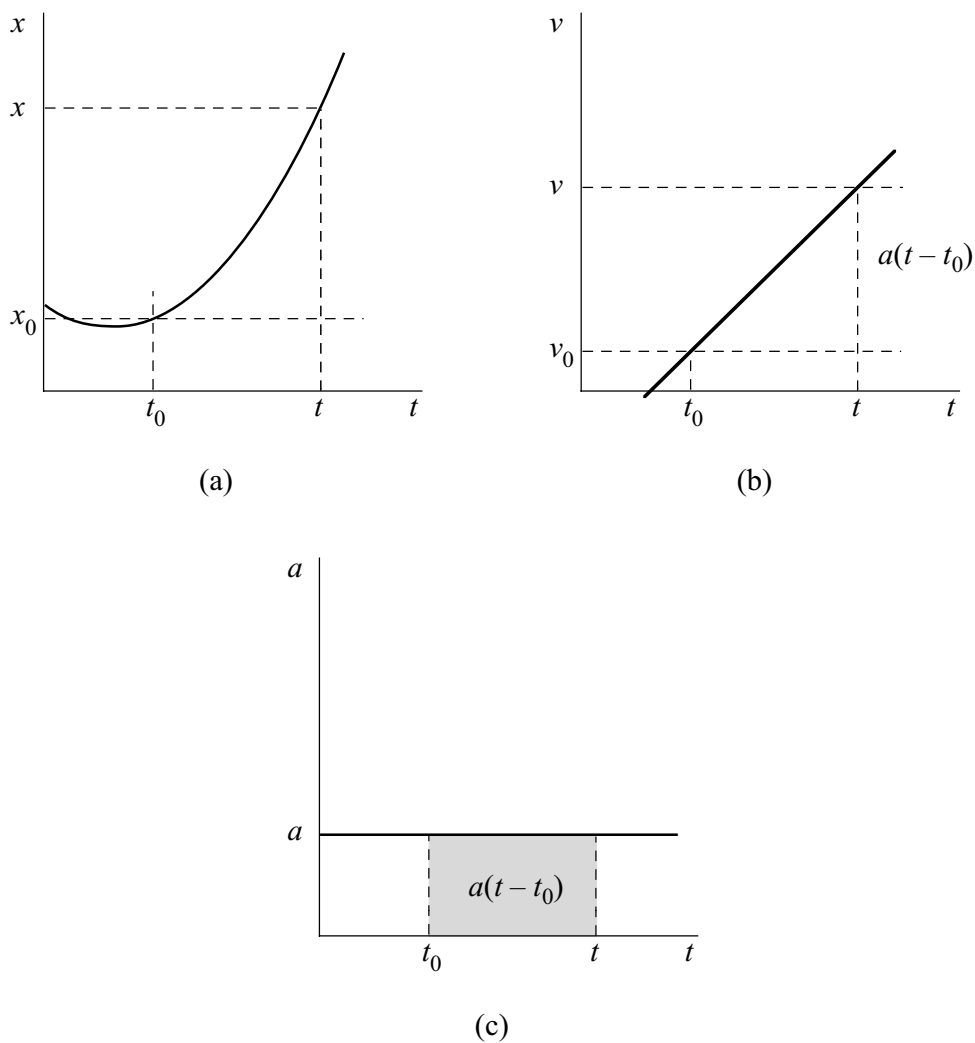


Fig. 3.10. Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado: (a) posición, (b) velocidad, (c) aceleración.

**Movimiento uniformemente acelerado**

Un caso particularmente interesante (e importante) de movimiento acelerado es el *movimiento uniformemente acelerado* (MUA) que es aquél que tiene lugar cuando la aceleración es constante. Si  $a = \text{cte.}$  de la (3.16) obtenemos de inmediato

$$v = v_0 + a(t - t_0) \quad (3.18)$$

y sustituyendo este resultado en la (3.17) resulta

$$x = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2 \quad (3.19)$$

que es la ecuación que describe el MUA. En la Fig. 3.10 representamos la distancia recorrida, la velocidad y la aceleración como funciones del tiempo para el MUA. En la misma se aprecia que  $x(t)$  es una parábola,  $y(t)$  es una recta y  $a$  es una recta paralela al eje de las abscisas.

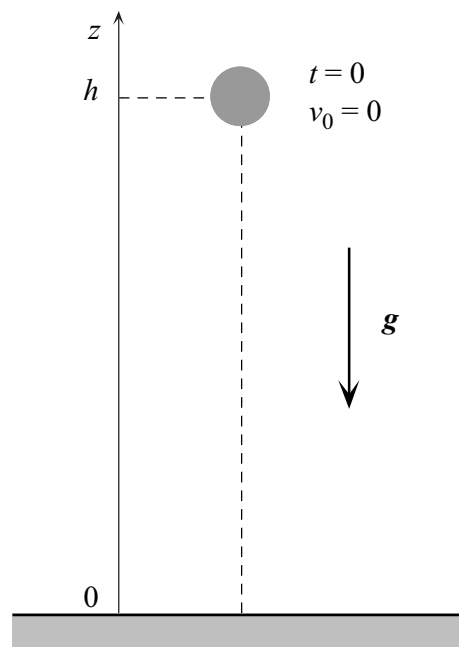


Fig. 3.11. Caída libre en el vacío.

**Caída libre en el vacío**

Un caso muy importante de MUA es la caída de los cuerpos bajo la acción de la gravedad. Se debe a Galileo el descubrimiento que todos los cuerpos que están cerca de la superficie terrestre caen con una aceleración *constante*. En realidad las cosas son más complicadas debido a la presencia del aire, que ofrece resistencia al movimiento. Pero si se hace la experiencia en *el vacío* se observa que todos los cuerpos caen con una aceleración constante, que además es la *misma* para todos cualquiera sea su forma, su tamaño y el material que los compone. Esta aceleración recibe el nombre de *aceleración de la gravedad* y se indica con  $g$ . Su valor depende del lugar de la Tierra en que nos encontramos y de la altura sobre el nivel del mar. En el Capítulo 9 trataremos en detalle el problema de los valores de  $g$ . Pero para muchos cálculos se puede tomar el valor aproximado

$$g \cong 980 \text{ gal} = 9.8 \text{ m/s}^2 \quad (3.20)$$

Consideremos un cuerpo que dejamos caer desde una altura  $h$  en el instante  $t = 0$ . Sea  $z$  la coordenada vertical medida a partir del suelo y positiva hacia arriba (ver Fig. 3.11). Las ecuaciones del movimiento se obtienen de las (3.18) y (3.19) con  $a = -g$ ,  $v_0 = 0$  y  $z_0 = h$ ; resulta entonces

$$v = -gt \quad , \quad z = h - \frac{1}{2}gt^2 \quad (3.21)$$

El tiempo  $t_c$  que tarda el cuerpo en caer desde  $h$  hasta el suelo está dado por

$$t_c = \sqrt{2h/g} \quad (3.22)$$

### **Movimiento en tres dimensiones**

Cuando el móvil describe una trayectoria general  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  el movimiento se puede analizar, si se quiere, como la superposición de tres movimientos unidimensionales considerando las proyecciones de  $\mathbf{r}$  en una terna  $x, y, z$ ; tendremos así que  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$ . Para cada proyección se pueden entonces aplicar las consideraciones precedentes acerca del movimiento a lo largo de una recta. Así definiremos las componentes  $x$  de la velocidad y de la aceleración como  $v_x = dx/dt$  y  $a_x = dv_x/dt = d^2x/dt^2$ , y análogamente para las componentes  $y, z$ . Esta forma de proceder es útil cuando  $a_x$  no depende de  $y, z$ , y análogamente para  $a_y, a_z$ . Sin embargo es más práctico y más intuitivo describir el movimiento en forma vectorial. Si  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  podemos definir la velocidad como

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} \quad (3.23)$$

Aquí el punto indica la derivada respecto del tiempo de  $q$ , donde  $q$  es una magnitud cualquiera escalar o vectorial. Obviamente  $\mathbf{v}$  es *tangente* a la trayectoria.

La *aceleración* se define vectorialmente como

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \dot{\mathbf{v}} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \ddot{\mathbf{r}} \quad (3.24)$$

donde dos puntos indican la derivada segunda de  $q$  respecto de  $t$ .

### **Terna intrínseca**

Para estudiar la aceleración conviene primero recordar algunas nociones de geometría. Sea una curva  $C$  en el espacio (ver Fig. 3.12) y sean  $P_1, P_2, P_3$  tres puntos de  $C$ . Como todos sabemos de la geometría elemental, tres puntos cualesquiera no alineados definen un plano  $\Pi$ , y en ese plano definen un círculo  $C$  cuyo radio indicaremos con  $\rho$ . Si desplazamos  $P_1, P_2, P_3$  con continuidad a lo largo de  $C$  cambiará la orientación de  $\Pi$  y también se modificarán  $C$  y  $\rho$ . Si  $P_1, P_2, P_3$  tienden a un único punto  $P$  (es decir si  $P_1, P_2, P_3 \rightarrow P$ ) el plano  $\Pi$  y el círculo  $C$  tienden a límites  $\Pi(P), C(P)$  y  $\rho$  tiende a un valor  $\rho(P)$ . Con este paso al límite podemos asociar a cada punto  $P$  de  $C$  un plano  $\Pi(P)$  que se denomina *plano osculador* de  $C$  en  $P$ , un círculo  $C(P)$  que se llama *círculo osculador* de  $C$  en  $P$  y un *radio de curvatura*  $\rho(P)$  de  $C$  en  $P$  (Fig. 3.13). Se conocen fórmulas que permiten hallar estos elementos dadas las ecuaciones de  $C$ , pero eso no nos

interesa ahora. Lo que aquí importa es solamente tener la imagen intuitiva del plano osculador, el círculo osculador y el radio de curvatura<sup>4</sup> en cada punto de  $C$ .

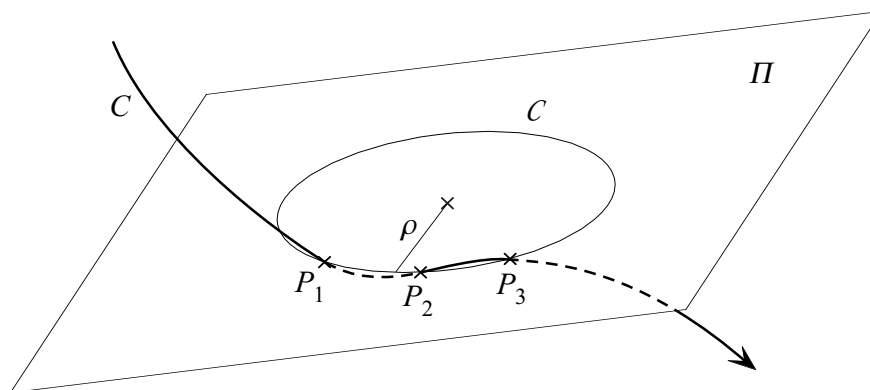


Fig. 3.12. Tres puntos próximos de la trayectoria determinan un plano y un círculo.

Usando estos conceptos podemos definir en cada punto de  $C$  una *terna intrínseca* (intrínseca porque está asociada a la curva misma) formada por tres ejes perpendiculares entre sí (Fig. 3.14) cuyas direcciones identificaremos mediante tres versores  $\hat{t}$ ,  $\hat{n}$ ,  $\hat{b}$  definidos de la manera siguiente:  $\hat{t}$  es tangente a  $C$  en  $P$ ,  $\hat{n}$  es perpendicular a  $\hat{t}$  y se dirige hacia el centro de  $C(P)$  y  $\hat{b} = \hat{t} \times \hat{n}$  es perpendicular al plano osculador, de modo que  $\hat{t}$ ,  $\hat{n}$ ,  $\hat{b}$  (en este orden) forman una terna derecha. El versor  $\hat{t}$  se llama *tangente*, el  $\hat{n}$  *normal*, y el  $\hat{b}$  *binormal* de  $C$  en  $P$ .

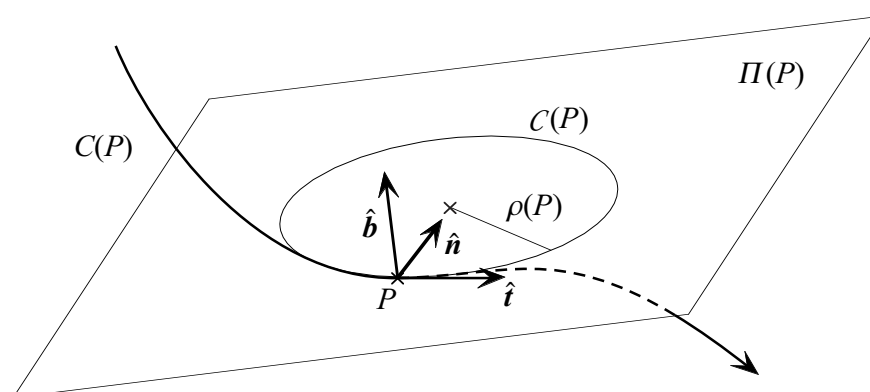


Fig. 3.13. Plano osculador, círculo osculador y radio de curvatura de  $C$  en  $P$ .

### Velocidad y aceleración en un movimiento curvilíneo general

Mediante la terna intrínseca es simple analizar la velocidad y la aceleración cuando  $C \equiv \mathbf{r}(t)$  es la trayectoria de un móvil<sup>5</sup>. En efecto, de la Fig. 3.15 es evidente que ( $v$  es el módulo de  $\mathbf{v}$ ):

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = v\hat{t} \quad (3.25)$$

<sup>4</sup> Una forma sintética de expresar estos conceptos es decir que el círculo osculador es el círculo definido por tres puntos de  $C$  infinitamente próximos, que el plano de ese círculo es el plano osculador y su radio el radio de curvatura.

<sup>5</sup> No confundir el símbolo  $t$  que representa el tiempo con el símbolo que designa el versor tangente.

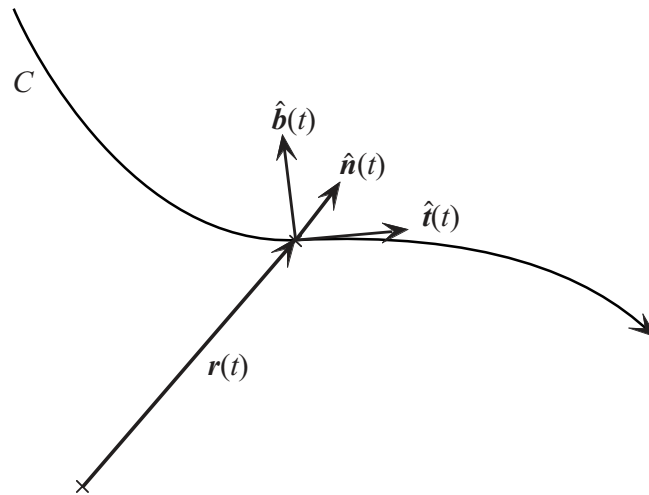


Fig. 3.14. Terna intrínseca.

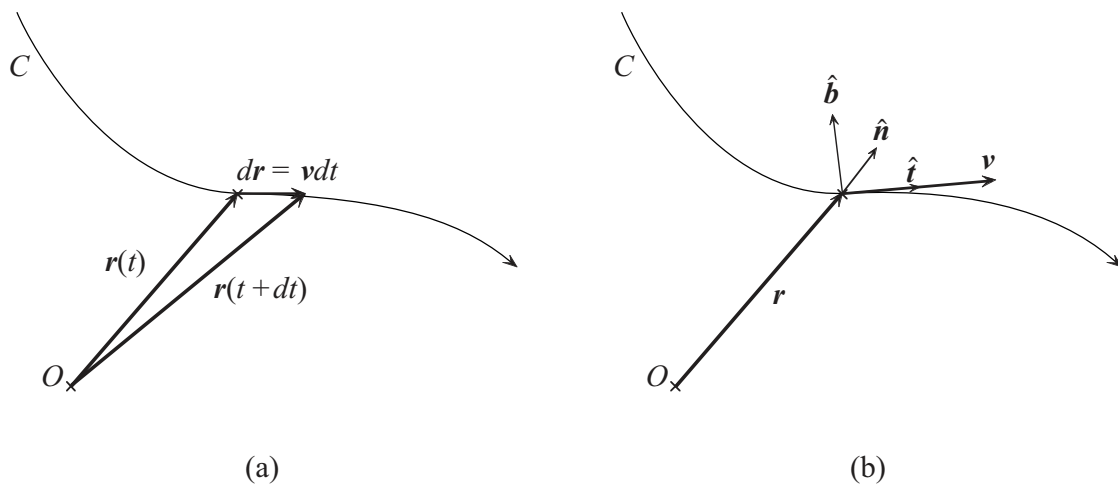


Fig. 3.15. La velocidad en un movimiento curvilíneo general.

La aceleración se obtiene derivando respecto del tiempo la (3.25). Resulta

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt} \hat{\mathbf{t}} + v \frac{d\hat{\mathbf{t}}}{dt} \quad (3.26)$$

Para ver que significa la (3.26) tenemos que calcular  $d\hat{\mathbf{t}}/dt$ . Observando la Fig. 3.16 vemos que  $d\hat{\mathbf{t}} = d\alpha \hat{\mathbf{n}}$  y que  $\rho d\alpha = v dt$ , por lo tanto

$$\frac{d\hat{\mathbf{t}}}{dt} = \frac{v}{\rho} \hat{\mathbf{n}} \quad (3.27)$$

Sustituyendo en la (3.26) obtenemos finalmente

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt} \hat{\mathbf{t}} + \frac{v^2}{\rho} \hat{\mathbf{n}} \quad (3.28)$$

En general la aceleración es la suma de dos términos. El primero,  $(dv/dt)\hat{t}$ , se relaciona con la variación del *módulo* de  $v$  y se llama *aceleración tangencial* porque está dirigido según  $\hat{t}$ . El segundo,  $(v^2/\rho)\hat{n}$ , se llama *aceleración centrípeta* porque al estar dirigido según  $\hat{n}$  apunta siempre hacia el centro (instantáneo) de curvatura de la trayectoria. La aceleración centrípeta cambia la *dirección* de la velocidad pero no su *módulo*.

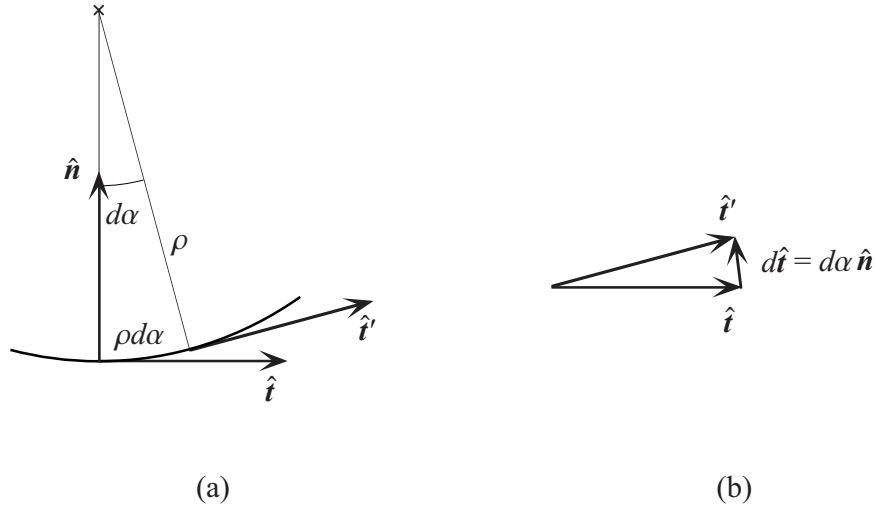


Fig. 3.16. Cálculo de  $d\hat{t}/dt$ .

### Algunos ejemplos de movimiento

#### Tiro oblicuo en el vacío

Si en  $t = t_0$  lanzamos un proyectil desde un punto  $P \equiv (x_0, y_0, z_0)$  con velocidad inicial  $v_0$  el móvil describirá un movimiento uniformemente acelerado con la aceleración  $a = -g\hat{z} = \text{cte}$ . La velocidad vale entonces

$$v = v_0 - g(t - t_0)\hat{z} \quad (3.29)$$

Integrando la (3.29) obtenemos la ecuación del movimiento:

$$r = r_0 + v_0(t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2\hat{z} \quad (3.30)$$

Sin pérdida de generalidad podemos elegir el sistema de coordenadas de modo que  $v_{0y} = 0$  y que en  $t = t_0$  el proyectil esté en el plano  $y = 0$ . Entonces la ecuación vectorial (3.29) equivale a

$$v_x = v_{0x} \quad , \quad v_y = 0 \quad , \quad v_z = v_{0z} - g(t - t_0) \quad (3.31)$$

Del mismo modo la (3.30) equivale a las tres ecuaciones

$$x = x_0 + v_{0x}(t - t_0) \quad , \quad y = 0 \quad , \quad z = z_0 + v_{0z}(t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2 \quad (3.32)$$

La trayectoria del móvil es una parábola en el plano  $(x, z)$ . El punto más alto de la trayectoria se alcanza cuando  $v_z = 0$ . Esto ocurre para  $t = t_m$  dado por

$$t_m = t_0 + \frac{v_{0z}}{g} \quad (3.33)$$

La altura máxima que alcanza el proyectil vale

$$z_m = z_0 + \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g} \quad (3.34)$$

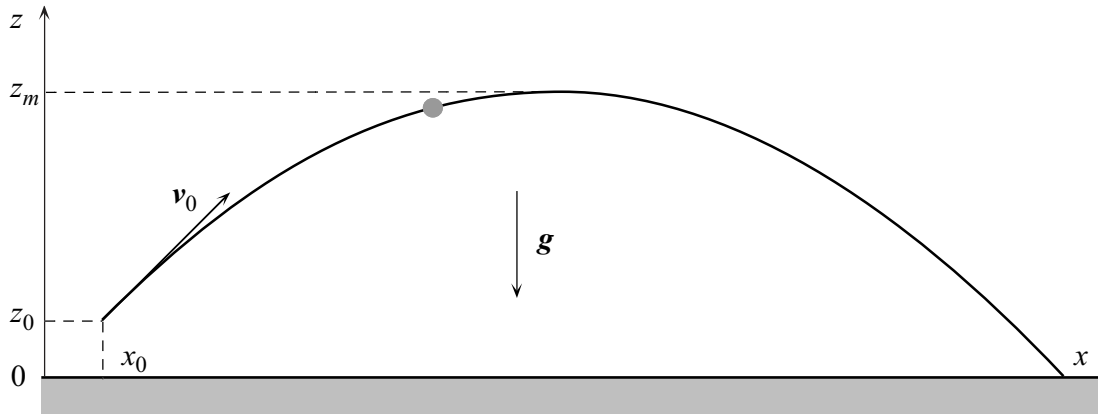


Fig. 3.17. Tiro oblicuo en el vacío.

Vamos a escribir los resultados (3.31)-(3.34) en forma universal expresándolos en términos de los parámetros característicos del problema, que podemos elegir como  $g$ ,  $v_0$  (el módulo de la velocidad inicial) y  $\theta_0$  (la elevación del tiro). A partir de ellos podemos definir las escalas de longitud, tiempo, velocidad y aceleración del fenómeno como, respectivamente:

$$\ell^* = v_0^2 / g \quad , \quad t^* = \sqrt{2} v_0 / g \quad , \quad v^* = v_0 \quad , \quad a^* = g / \sqrt{2} \quad (3.35)$$

donde el factor  $\sqrt{2}$  se puso por conveniencia. Sean  $x' = x - x_0$ ,  $z' = z - z_0$ ,  $t' = t - t_0$  y

$$x' = \ell^* X \quad , \quad z' = \ell^* Z \quad , \quad t' = t^* T \quad , \quad \mathbf{v} = v^* \mathbf{V} \quad (3.36)$$

Entonces nuestros resultados anteriores se escriben como

$$V_x = \cos \theta_0 \quad , \quad V_z = \text{sen} \theta_0 - \sqrt{2} T \quad (3.37)$$

y

$$X = \sqrt{2} T \cos \theta_0 \quad , \quad Z = \sqrt{2} T \text{sen} \theta_0 - T^2 \quad (3.38)$$

de donde resultan los datos de la altura máxima del tiro en la forma

$$T_m = \frac{\text{sen} \theta_0}{\sqrt{2}} \quad , \quad X_m = \cos \theta_0 \text{sen} \theta_0 \quad , \quad Z_m = \frac{\text{sen}^2 \theta_0}{\sqrt{2}} \quad (3.39)$$

y por lo tanto  $X_m^2 = \sqrt{2} Z_m (1 - \sqrt{2} Z_m)$ . Si eliminamos  $T$  entre las (3.38) podemos obtener la ecuación de la trayectoria en la forma

$$Z = X \tan \theta_0 - \frac{X^2}{2 \cos^2 \theta_0} \quad (3.40)$$

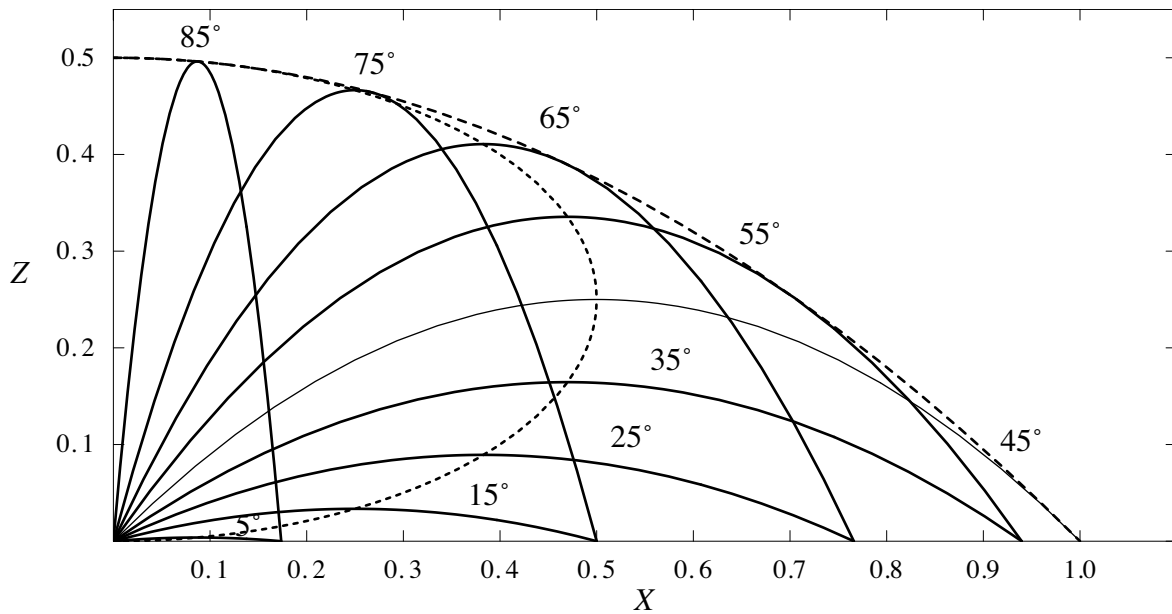


Fig. 3.18. Trayectorias de tiros en el vacío correspondientes a disparos con diferentes elevaciones.

El alcance  $X_a$  del tiro se obtiene poniendo  $Z = 0$  en la (3.40) y resulta

$$X_a = \text{sen } 2\theta_0 \quad (3.41)$$

El tiempo de vuelo entre  $X = 0$  y  $X = X_a$  es  $T_a = \sqrt{2} \text{sen } \theta_0$ . De la (3.41) es evidente que el máximo alcance vale  $X_{am} = 1$  y se obtiene para  $\theta_0 = \pi/4$ , después de un tiempo de vuelo  $T_{am} = 1$ . En la Fig. 3.18 se muestran varias trayectorias para diferentes valores de  $\theta_0$ .

### Movimiento circular

La trayectoria del movimiento circular es una circunferencia  $C$  de radio  $r$  y centro en  $O$  (Fig. 3.19). La posición  $P$  del móvil se puede especificar dando el ángulo  $\alpha$  entre una dirección fija  $x$  y el vector  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{OP}$ . Podemos definir la *velocidad angular* como

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt} \quad (3.42)$$

cuyas dimensiones son

$$[\omega] = [\alpha]/[t] = [t^{-1}] \quad (3.43)$$

o sea las de la inversa del tiempo. Conviene definir el vector velocidad angular  $\boldsymbol{\omega}$  como un vector cuyo módulo es  $\omega$ , cuya dirección es la del eje de rotación (la normal al plano de la trayectoria que pasa por  $O$ ) y cuyo sentido es el sentido de avance de un tornillo de rosca derecha que gira en el sentido en que lo hace el móvil, de modo que  $\boldsymbol{\omega}$ ,  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{v}$  (en este orden) forman una terna *derecha*. Observando la Fig. 3.19 está claro que

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} r \quad (3.44)$$

vectorialmente:



$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \omega r \hat{\mathbf{t}} \quad (3.45)$$

Para calcular la aceleración derivamos la (3.45) recordando que  $r$  es constante y que la dirección de  $\boldsymbol{\omega}$  no cambia. Resulta entonces

$$\mathbf{a} = r \frac{d\omega}{dt} \hat{\mathbf{t}} + \omega r \frac{d\hat{\mathbf{t}}}{dt} \quad (3.46)$$

Recordando la (3.27) tenemos que

$$\frac{d\hat{\mathbf{t}}}{dt} = \frac{v}{r} \hat{\mathbf{n}} = \omega \hat{\mathbf{n}} \quad (3.47)$$

Luego

$$\mathbf{a} = r \frac{d\omega}{dt} \hat{\mathbf{t}} + \omega^2 r \hat{\mathbf{n}} \quad (3.48)$$

Tenemos pues una aceleración tangencial (presente solo si  $\omega$  varía en el tiempo) y una aceleración centrípeta

$$\mathbf{a}_c = \omega^2 r \hat{\mathbf{n}} = \frac{v^2}{r} \hat{\mathbf{n}} \quad (3.49)$$

Estos resultados se podrían haber obtenido de inmediato usando la (3.28).

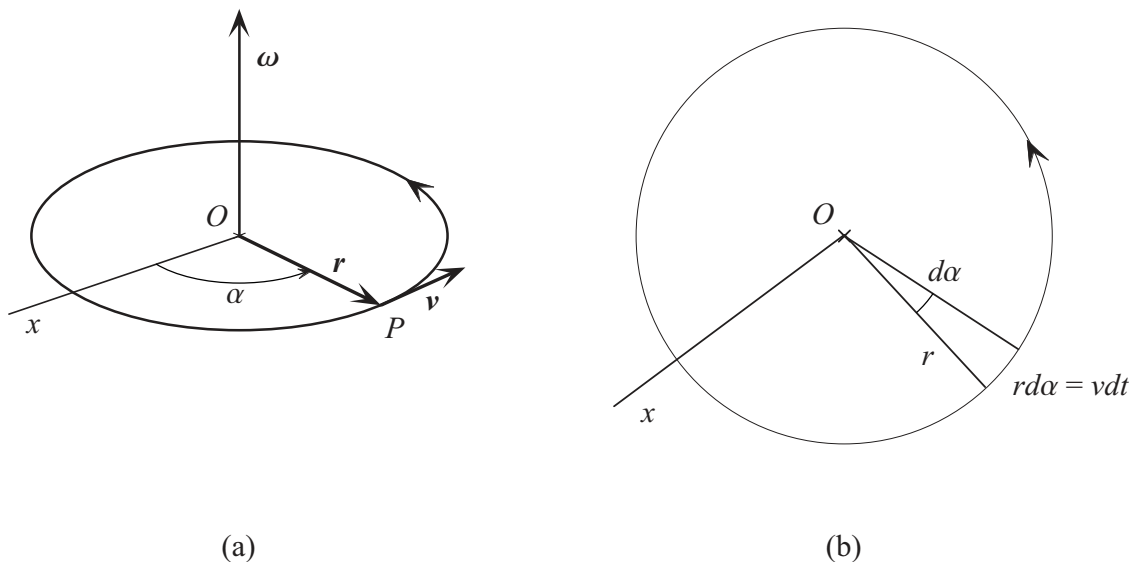


Fig. 3.19. Movimiento circular: (a) geometría del problema, (b) relación entre  $\alpha$  y  $v$ .

### Movimiento circular uniforme

Si no hay aceleración tangencial  $\omega$  se mantiene constante y sólo tenemos aceleración centrípeta, entonces la velocidad  $\mathbf{v}$  mantiene constante su módulo y sólo cambia su dirección:

$$\mathbf{v} = \omega r \hat{\mathbf{t}} = v \hat{\mathbf{t}} \quad (3.50)$$

Para el movimiento circular uniforme es útil definir el *período*, es decir el tiempo  $T$  que tarda el móvil en dar una vuelta. Claramente

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (3.51)$$

Otra magnitud útil es la *frecuencia*, es decir la cantidad  $f$  de vueltas por unidad de tiempo:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (3.52)$$

En términos de  $T$  y  $f$  la velocidad y la aceleración centrípeta se escriben:

$$v = \frac{2\pi r}{T} = 2\pi r f \quad , \quad a_c = \frac{4\pi^2 r}{T^2} = 4\pi^2 r f^2 \quad (3.53)$$

### Movimiento en un plano

Para describir un movimiento plano podemos emplear coordenadas *polares* con origen en un punto  $O$ . En tal caso especificaremos  $r$  dando su módulo  $r$  y el ángulo  $\varphi$  que forma con una dirección fija  $\hat{x}$ . La trayectoria de un móvil se describe entonces dando  $r(t)$  y  $\varphi(t)$ . Claramente

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \quad (3.54)$$

es la velocidad angular de rotación alrededor del *origen* (que *no* es en general el centro instantáneo de giro). Por otra parte

$$v_r = \frac{dr}{dt} \quad (3.55)$$

es la *velocidad radial*, es decir la velocidad con que el móvil se aleja del o se acerca al origen.

En cada punto  $P$  de la trayectoria podemos definir dos versores  $\hat{r}$  y  $\hat{\varphi}$  (Fig. 3.20), el primero en la dirección radial y el segundo perpendicular al primero y en el sentido de  $\varphi$  creciente. Entonces

$$\mathbf{v} = v_r \hat{r} + \omega r \hat{\varphi} \quad (3.56)$$

La aceleración es

$$\mathbf{a} = \frac{dv_r}{dt} \hat{r} + v_r \frac{d\hat{r}}{dt} + r \frac{d\omega}{dt} \hat{\varphi} + \omega v_r \hat{\varphi} + \omega r \frac{d\hat{\varphi}}{dt} \quad (3.57)$$

Pero es fácil verificar que

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = \omega \hat{\varphi} \quad , \quad \frac{d\hat{\varphi}}{dt} = -\omega \hat{r} \quad (3.58)$$

Sustituyendo (3.58) en la (3.57) obtenemos la expresión de la aceleración:

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - \omega^2 r) \hat{r} + (2\omega v_r + r\dot{\omega}) \hat{\varphi} \quad (3.59)$$

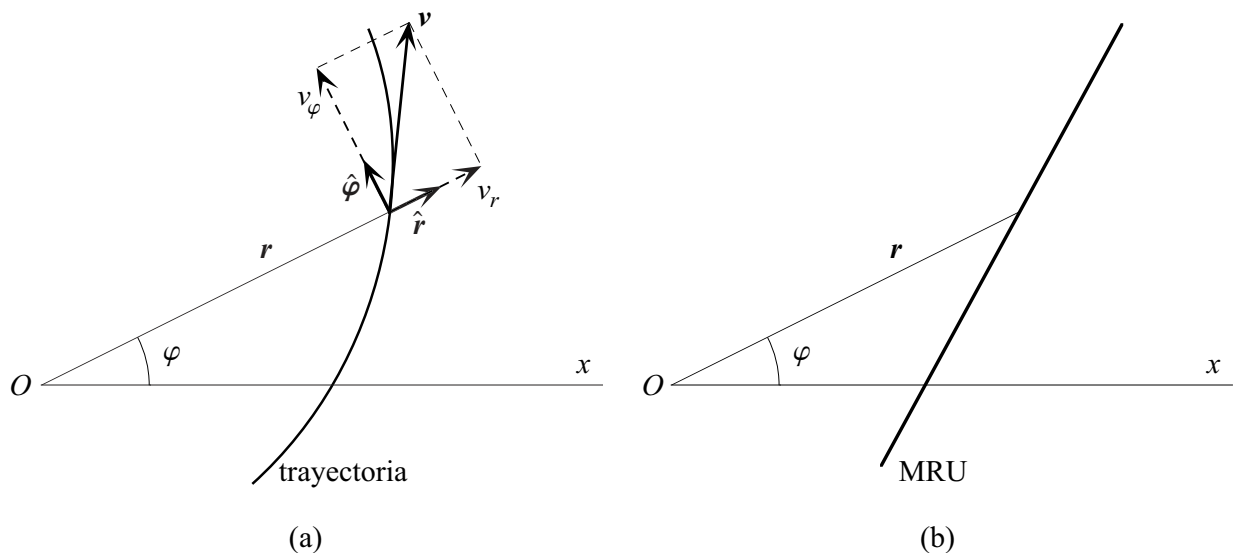


Fig. 3.20. Descripción de un movimiento plano usando coordenadas polares: (a) componentes de la velocidad, (b) el movimiento rectilíneo uniforme.

Es interesante mostrar como se describe el movimiento rectilíneo uniforme en coordenadas polares. Puesto que  $\mathbf{a} = 0$  las componentes de la (3.59) son nulas. De  $\square_\varphi = 0$  resulta  $2\omega v_r + r\dot{\omega} = 0$ , que multiplicado por  $r$  equivale a  $2\omega r v_r + r^2\dot{\omega} = 0$ , o sea

$$\frac{d}{dt}(r^2\omega) = \frac{d}{dt}(r v_\varphi) = 0 \quad (3.60)$$

La (3.60) implica que

$$r v_\varphi = \text{cte.} \quad (3.61)$$

Se puede notar que la cantidad  $dA = (1/2)r v_\varphi dt$  es el área barrida por el radio vector  $OP$  en el intervalo  $dt$ . Luego la (3.61) expresa que  $OP$  barre áreas iguales en tiempos iguales<sup>6</sup>.

De  $a_{r\square} = 0$  y recordando la (3.61) obtenemos  $\square_\square \omega^2 r = (r v_\varphi)^2 r^{-3}$  que significa que la aceleración radial es inversamente proporcional a  $r^3$ .

### Movimiento relativo de traslación

Nos interesa ahora analizar qué pasa cuando un móvil es visto por dos observadores distintos que se mueven el uno respecto del otro. Como se ve de la Fig. 3.21 la posición del objeto  $A$  está dada por  $\mathbf{r}_A$  para el observador  $O$  y por  $\mathbf{r}'_A$  para el observador  $O'$ . Si  $\mathbf{r}_{O'}$  es la posición de  $O'$  para el observador  $O$ , vale la relación

$$\mathbf{r}'_A = \mathbf{r}_A - \mathbf{r}_{O'} \quad (3.62)$$

En componentes, si  $x_A, y_A, z_A$  son las coordenadas de  $A$  y  $x_{O'}, y_{O'}, z_{O'}$  son las coordenadas de  $O'$  en el sistema  $x, y, z$  con origen en  $O$ , y si  $x'_A, y'_A, z'_A$  son las coordenadas de  $A$  en un sistema con origen en  $O'$  cuyos ejes  $x', y', z'$  son paralelos a  $x, y, z$ , será

<sup>6</sup> Este es un caso particular de la Segunda Ley de Kepler, también llamada Ley de las Áreas, que estudiaremos en el Capítulo 7.

$$x'_A = x_A - x_{O'} \quad , \quad y'_A = y_A - y_{O'} \quad , \quad z'_A = z_A - z_{O'} \quad (3.63)$$

Supongamos ahora que el móvil  $A$  se desplaza respecto de  $O$  con la velocidad  $\mathbf{v}_A$  y la aceleración  $\mathbf{a}_A$ . El problema es: ¿cómo ve este movimiento un observador ubicado en  $O'$  que se mueve respecto de  $O$  con la velocidad  $\mathbf{v}_{O'}$  y la aceleración  $\mathbf{a}_{O'}$ ?

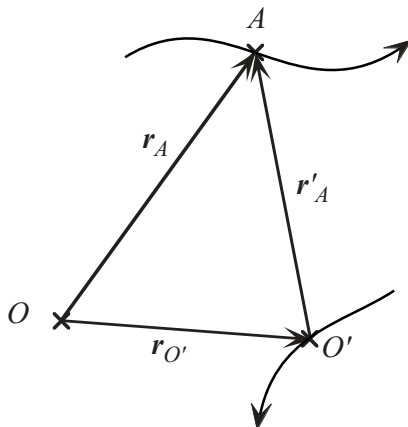


Fig. 3.21. La posición depende del observador.

Para averiguar esto basta derivar la (3.62) respecto del tiempo. Resulta entonces que

$$\mathbf{v}'_A = \mathbf{v}_A - \mathbf{v}_{O'} \quad , \quad \mathbf{a}'_A = \mathbf{a}_A - \mathbf{a}_{O'} \quad (3.64)$$

Estas son las fórmulas que resuelven nuestro problema. Un caso importante es aquél en que  $\mathbf{a}_{O'} = 0$ , o sea que los observadores  $O$  y  $O'$  se mueven el uno respecto del otro con velocidad *constante* (el movimiento relativo de  $O$  y  $O'$  es rectilíneo y uniforme). En este caso

$$\mathbf{v}'_A = \mathbf{v}_A - \mathbf{v}_{O'} \quad , \quad \mathbf{a}'_A = \mathbf{a}_A \quad , \quad (\mathbf{a}_{O'} = 0) \quad (3.65)$$

y ambos observadores encuentran que la aceleración de  $A$  es la misma. Las transformaciones (3.65) se llaman *transformaciones de Galileo*.

### **Movimiento relativo de rotación**

Vamos a estudiar como se relaciona el movimiento de un objeto visto desde un sistema de referencia fijo  $\Sigma$  con el que se observa desde un sistema de referencia rotante  $\Sigma'$  que gira respecto de  $\Sigma$  con una velocidad angular  $\boldsymbol{\omega}$ . Este caso es importante porque corresponde a un observador situado sobre la Tierra, que como sabemos gira sobre su eje. Vamos a llamar  $x, y, z$  a los ejes fijos y  $x', y', z'$  los ejes rotantes (indicaremos con prima una variable referida al sistema móvil y sin prima si está referida al sistema fijo). Si  $P$  es un punto fijo respecto de  $\Sigma'$ , que gira solidariamente con él respecto de  $\Sigma$ , tendrá en el sistema fijo la velocidad  $\mathbf{v}_a = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ . Esta  $\mathbf{v}_a$  es la velocidad con que  $P$  es arrastrado por el sistema rotante. Si además el móvil se mueve respecto de  $\Sigma'$  con la velocidad  $\mathbf{v}'$  su velocidad en el sistema fijo será

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (3.66)$$

Esta es la expresión que relaciona  $\mathbf{v}$  con  $\mathbf{v}'$ .

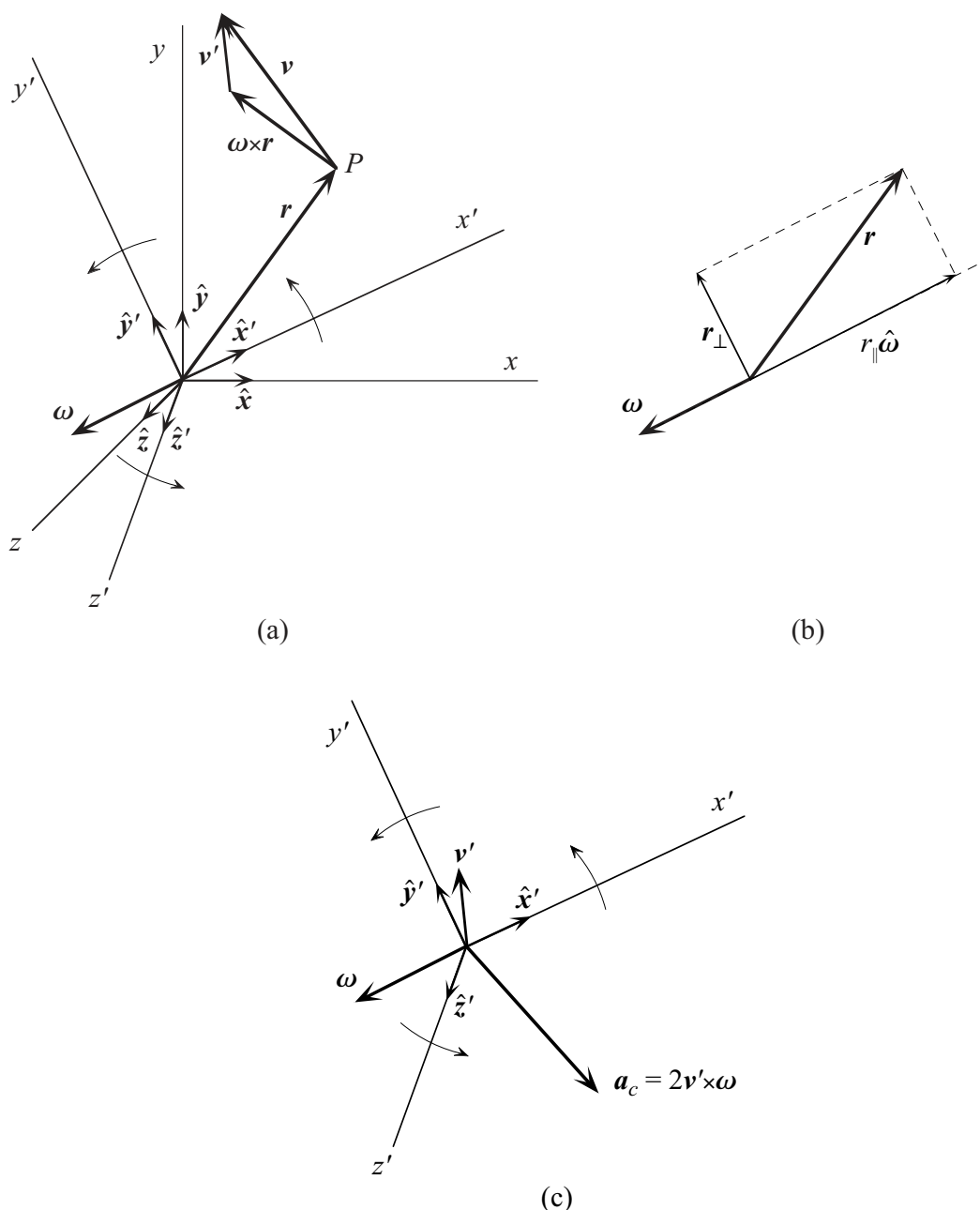


Fig. 3.22. Movimiento relativo de rotación: (a) la relación entre las velocidades que se observan desde el sistema fijo y desde el sistema rotante, (b) componentes del vector posición paralela y perpendicular a  $\omega$ , (c) la aceleración de Coriolis.

Calculemos ahora las aceleraciones. Para ello tenemos que derivar respecto del tiempo los dos términos del miembro derecho de la (3.66). Para calcular el primero recordemos que

$$\mathbf{v}' = v'_{x'} \hat{\mathbf{x}}' + v'_{y'} \hat{\mathbf{y}}' + v'_{z'} \hat{\mathbf{z}}' = \sum_{i'=x',y',z'} v'_{i'} \hat{\mathbf{i}}' \quad (3.67)$$

donde  $\hat{\mathbf{x}}'$ ,  $\hat{\mathbf{y}}'$ ,  $\hat{\mathbf{z}}'$  son los versores correspondientes a los ejes rotantes, que naturalmente *no son constantes* sino que varían con el tiempo debido a la rotación. Luego

$$\frac{d\mathbf{v}'}{dt} = \sum_{i'=x',y',z'} \frac{dv'_{i'}}{dt} \hat{\mathbf{i}}' + \sum_{i'=x',y',z'} v'_{i'} \frac{d\hat{\mathbf{i}}'}{dt} \quad (3.68)$$

Ahora

$$\sum_{i'=x',y',z'} \frac{dv'_{i'}}{dt} \hat{i}' = \mathbf{a}' \quad (3.69)$$

es la aceleración que se observa desde el sistema rotante. Por otra parte  $d\hat{i}'/dt = \boldsymbol{\omega} \times \hat{i}'$  puesto que los versores  $\hat{x}'$ ,  $\hat{y}'$ ,  $\hat{z}'$  rotan con velocidad angular  $\boldsymbol{\omega}$ . Luego

$$\sum_{i'=x',y',z'} v'_{i'} \frac{d\hat{i}'}{dt} = \sum_{i'=x',y',z'} v'_{i'} \boldsymbol{\omega} \times \hat{i}' = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' \quad (3.70)$$

Usando las (3.69) y (3.70) la (3.68) se escribe en la forma

$$\frac{d\mathbf{v}'}{dt} = \mathbf{a}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' \quad (3.71)$$

Derivando el segundo término de la (3.66) obtenemos

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \quad (3.72)$$

Recordando la (3.66) tenemos que

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \quad (3.73)$$

Para evaluar el triple producto vectorial  $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$  ponemos  $\mathbf{r} = r_{\parallel} \hat{\boldsymbol{\omega}} + \mathbf{r}_{\perp}$  donde  $r_{\parallel}$  y  $\mathbf{r}_{\perp}$  son las partes de  $\mathbf{r}$  paralela y perpendicular a  $\boldsymbol{\omega}$ . Evidentemente  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\perp}$ . Además usando la fórmula del triple producto vectorial

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \quad (3.74)$$

tenemos que  $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\perp}) = -\omega^2 \mathbf{r}_{\perp}$ . Luego

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' - \omega^2 \mathbf{r}_{\perp} \quad (3.75)$$

Por lo tanto reuniendo los dos términos (3.71) y (3.75) de la aceleración resulta

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' - \omega^2 \mathbf{r}_{\perp} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} \quad (3.76)$$

De aquí podemos obtener la aceleración que se observa en el sistema rotante:

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} + \omega^2 \mathbf{r}_{\perp} + 2\mathbf{v}' \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{r} \times \dot{\boldsymbol{\omega}} \quad (3.77)$$

La fórmula (3.77) expresa que la aceleración observada desde el sistema rotante (que se llama *aceleración aparente*) es igual a la aceleración que se ve en el sistema fijo más tres términos:

- El primer término ( $\omega^2 \mathbf{r}_{\perp}$ ) es la *aceleración centrífuga*. Se la llama así porque tiene la dirección de  $\mathbf{r}_{\perp}$ , es decir alejándose del eje de rotación. Esta aceleración existe aunque el objeto esté en reposo en el sistema rotante (corresponde a la aceleración centrípeta de arrastre).

- El término  $2\mathbf{v}' \times \boldsymbol{\omega}$  se llama *aceleración de Coriolis* o *aceleración complementaria* y es perpendicular a  $\mathbf{v}'$  y  $\boldsymbol{\omega}$ . Por efecto de la aceleración de Coriolis un móvil que se mueve en el sistema rotante tiende a *desviarse* de la línea recta.
- El último término  $(\mathbf{r} \times \dot{\boldsymbol{\omega}})$  depende de la *aceleración de la rotación*.

Para ver mejor el significado de la aceleración de Coriolis consideremos un *movimiento rectilíneo uniforme* en el sistema fijo, visto desde un sistema *rotante* con  $\boldsymbol{\omega} = \text{cte.}$  En este caso  $\mathbf{a} = 0$ ,  $\mathbf{v} = \text{cte.}$ ,  $\dot{\boldsymbol{\omega}} = 0$  y  $\mathbf{a}' = \omega^2 \mathbf{r}_\perp + 2\mathbf{v}' \times \boldsymbol{\omega}$ . Supongamos que el movimiento tiene lugar en un plano perpendicular a  $\boldsymbol{\omega}$ , que tomaremos como el plano de la Fig. 3.23, y que en  $t = 0$  el móvil pasa por el origen (eje de rotación). La Fig. 3.23a muestra la trayectoria en el sistema rotante y se indica como varía  $\mathbf{v}'$  debido a la aceleración centrífuga y al término de Coriolis.

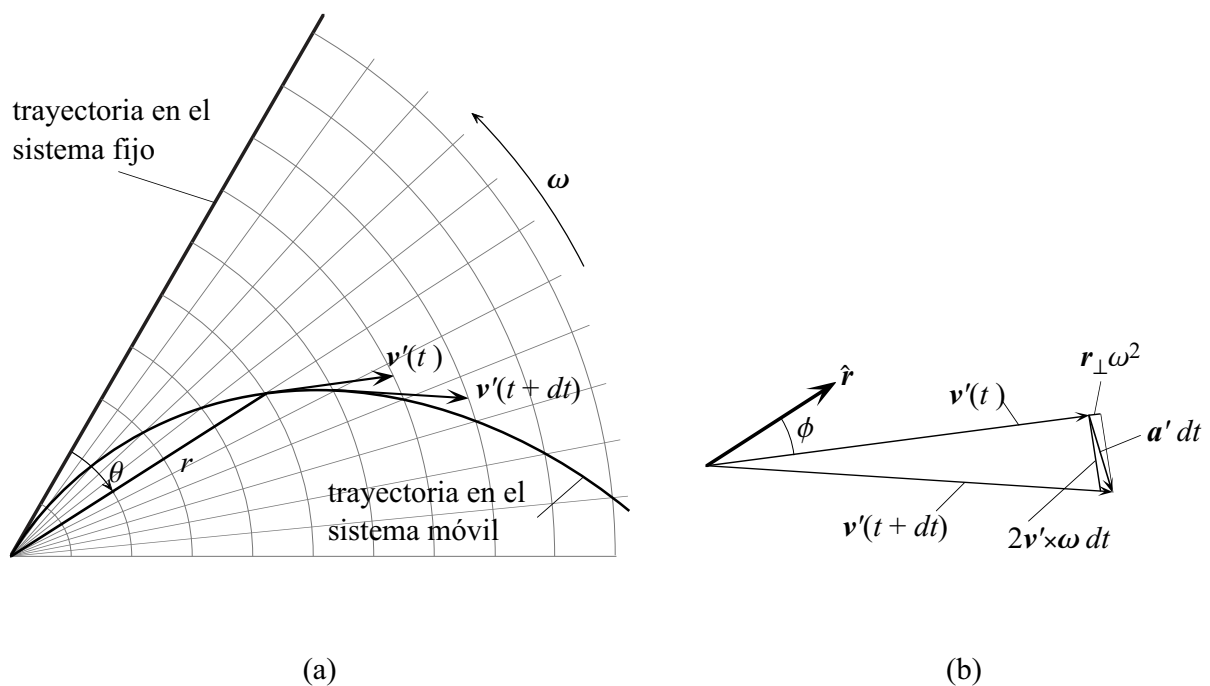


Fig. 3.23. Un movimiento rectilíneo uniforme visto desde un referencial rotante: (a) la trayectoria del móvil, (b) las componentes de la aceleración.

Empleando coordenadas polares  $r$ ,  $\theta$  en el sistema rotante las ecuaciones del movimiento son

$$r = vt \quad , \quad \theta = -\omega t \quad (3.78)$$

Eliminando el tiempo obtenemos la ecuación de la trayectoria

$$r = -\frac{v}{\omega} \theta \quad (3.79)$$

que describe una curva llamada *espiral de Arquímedes*. La velocidad en el sistema rotante no es, naturalmente, constante pues  $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$  por la (3.66). Su módulo vale

$$v' = \sqrt{v^2 + r^2 \omega^2} \quad (3.80)$$

y el ángulo  $\phi$  que forma con  $\hat{\mathbf{r}}$  está dado por

$$\tan \phi = r\omega / v \quad (3.81)$$

La velocidad radial en el sistema rotante es  $v'_r = v' \cos \phi$  y se mantiene *constante*. De allí la construcción geométrica de la Fig. 3.23b donde se muestra que la variación de  $\mathbf{v}'$  se debe a los efectos de la aceleración centrífuga  $\omega^2 \mathbf{r}_\perp (= \omega^2 \mathbf{r})$  y la aceleración de Coriolis.

### La Tierra como sistema de referencia

La Tierra gira sobre un eje que pasa por los polos con una velocidad angular

$$\omega = \frac{2\pi}{\text{día sidéreo}} \cong 7.27 \times 10^{-5} \text{ radianes/s} \quad (3.82)$$

que podemos considerar constante. El radio de la Tierra (que es aproximadamente esférica) vale  $r_T \cong 6400 \text{ km} = 6.4 \times 10^6 \text{ m}$ .

### Efectos de la aceleración centrífuga

Para un observador en la superficie de la Tierra la aceleración centrífuga vale

$$\mathbf{a}_c = \omega^2 \mathbf{r}_\perp = \omega^2 r_T \cos \theta \hat{\mathbf{r}}_\perp = 0.034 \cos \theta \hat{\mathbf{r}}_\perp \text{ (m/s}^2\text{)} \quad (3.83)$$

siendo  $\theta$  la latitud geográfica (Fig. 3.24a). Debido a esto la aceleración *aparente* de la gravedad (la que observamos desde la Tierra) para un objeto en reposo difiere de la que vería un observador desde el espacio (Fig. 3.24b). La aceleración centrífuga es nula en los polos y es máxima en el ecuador, donde su magnitud es de 3.4 gal (un 0.35% de  $g$ ) y su dirección coincide con la de  $\mathbf{g}$  (la vertical geométrica). Salvo en los polos la aceleración aparente de la gravedad  $\mathbf{g}' = \mathbf{g} + \mathbf{a}_c$  difiere de  $\mathbf{g}$ . La diferencia en módulo es máxima (un 0.35%) en el ecuador. La vertical de la plomada (dada por  $\mathbf{g}'$ ) se desvía hacia el ecuador respecto de la vertical geométrica (dada por  $\mathbf{g}$ ) en un ángulo  $\psi \cong 1.78 \times 10^{-3} \sin 2\theta$ ; la desviación máxima ocurre para  $\theta = \pm 45^\circ$  y es de apenas  $0.1^\circ$ .

### Efectos de la aceleración de Coriolis

Para un objeto en movimiento está presente también el término de Coriolis y entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{a}' &= \mathbf{a} + \omega^2 \mathbf{r}_\perp + 2\mathbf{v}' \times \boldsymbol{\omega} \\ &= \mathbf{a} + 0.034 \cos \theta \hat{\mathbf{r}}_\perp + 1.454 \times 10^{-4} (\mathbf{v}' \times \hat{\boldsymbol{\omega}}) \quad \text{(MKS)} \end{aligned} \quad (3.84)$$

La aceleración de Coriolis ( $\mathbf{a}_{Co}$ ) conduce a varios efectos observables. Estos comprenden:

- La desviación desde la vertical en la caída libre de un objeto. Como se puede ver fácilmente de la Fig. 3.25 el término conduce a una desviación hacia el este respecto de la vertical.
- La desviación de movimientos horizontales. Como se puede apreciar de la Fig. 3.26, un objeto que se mueve horizontalmente se tiende a desviar hacia la *derecha* en el *hemisferio Norte* y hacia la *izquierda* en el *hemisferio Sur*.

Para movimientos horizontales  $\mathbf{v}' \times \hat{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{v}' \times (\cos \theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + \sin \theta \hat{\mathbf{r}})$  de modo que la componente horizontal de  $\mathbf{a}_{Co}$  es  $2\omega(\mathbf{v}' \times \hat{\boldsymbol{\omega}})_h = 2\omega \sin \theta \mathbf{v}' \times \hat{\mathbf{r}} = f v' (\hat{\mathbf{v}}' \times \hat{\mathbf{r}})$  donde  $f = 2\omega \sin \theta$  se denomina *parámetro de Coriolis*. Para la Tierra  $f = 1.454 \times 10^{-4} \sin \theta \text{ s}^{-1}$  y  $\mathbf{a}_{Co}$  es pequeña. Usando la (3.84) podemos estimar las desviaciones  $\Delta v'/v'$  producidas en un lapso  $\Delta t$  como  $\Delta v'/v' \approx 1.454 \times 10^{-4} \Delta t \text{ (s)}$ . Luego para que sean apreciables la duración del fenómeno tiene que ser larga.



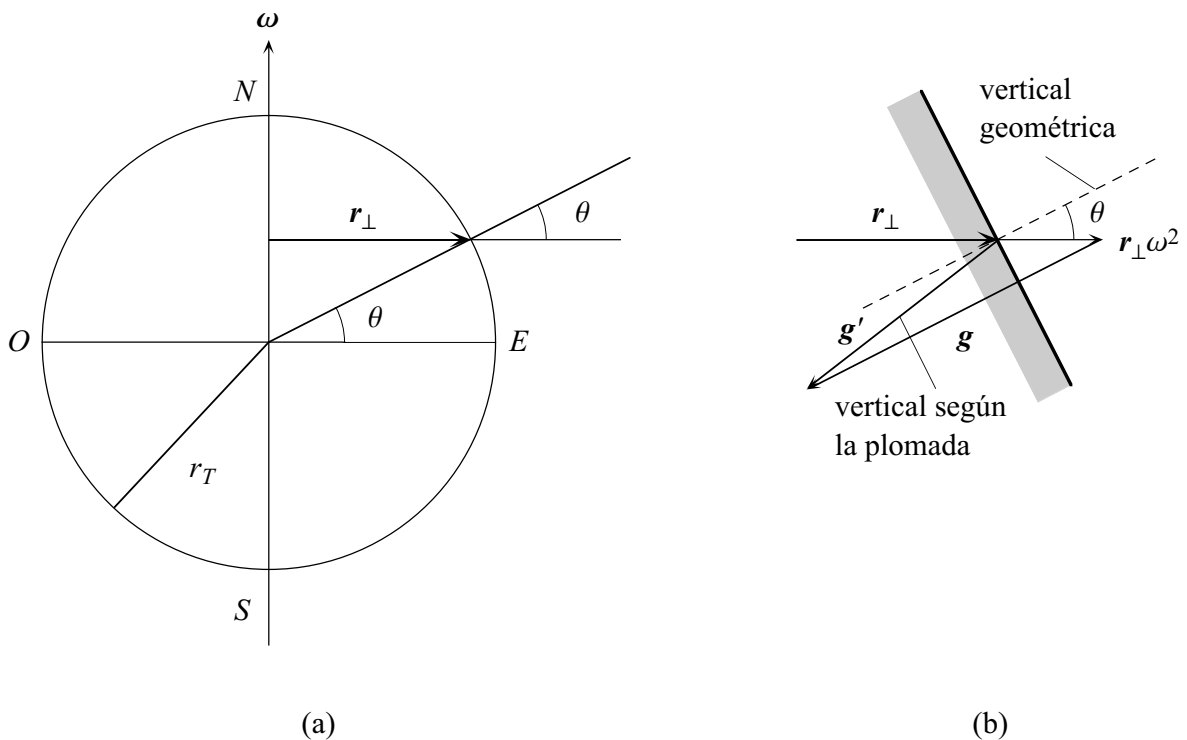


Fig. 3.24. Efecto de la aceleración centrífuga para un observador terrestre: (a) la geometría del problema, (b) debido a la aceleración centrífuga la vertical que indica una plomada no coincide con la vertical geométrica del lugar.

Consideremos la desviación hacia el Este en la caída libre de un cuerpo desde 100 m de altura. De la (3.22) se obtiene  $\Delta t = t_c = 4.51$  s, de donde resulta una desviación de  $0.038^\circ$ , que implica que el cuerpo toca el suelo a una distancia de 6.5 cm del pie de la vertical. Este ejemplo muestra que cuando se trata de fenómenos cuya duración no excede de pocos segundos los efectos de  $\mathbf{a}_{Co}$  se pueden ignorar. No es así sin embargo cuando  $\Delta t$  es largo. Consideremos un tiro de artillería para batir un blanco a 10 km de distancia. Usando las fórmulas del tiro oblicuo y suponiendo que la elevación del cañón es de  $45^\circ$  para obtener el máximo alcance se encuentra que el proyectil demora 45 s para llegar al blanco. Con este valor de  $\Delta t$  resulta una desviación de  $0.38^\circ$  que implica que el proyectil llega a 65 m de distancia de donde se apuntó. Luego si quiere dar en el blanco el artillero tiene que tomar en cuenta<sup>7</sup>  $\mathbf{a}_{Co}$ . Notemos que  $\Delta v'/v' = 1/\mathcal{R}_\rho$ , donde  $\mathcal{R}_\rho$  es el número de Rossby que se define como  $\mathcal{R}_\rho = U/fL$ . El número de Rossby es la razón entre la magnitud de la aceleración  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{a}_{Co}$  y para flujos en gran escala es muy pequeño. Por ejemplo para corrientes marinas  $U \approx 0.01$  m/s,  $L \approx 1000$  km y  $f \approx 10^{-4}$  s<sup>-1</sup> luego  $\mathcal{R}_\rho \approx 10^{-4}$ . Al estudiar fenómenos como las corrientes marinas y atmosféricas es fundamental tomar en cuenta los efectos de la rotación de la Tierra. La desviación de movimientos horizontales explica el sentido de la circulación de los vientos alrededor de los centros de baja presión (centros ciclónicos) que es antihorario en el hemisferio Norte y horario en el hemisferio Sur. El sentido de la circulación de las corrientes marinas también se relaciona con la aceleración de Coriolis.

<sup>7</sup> Se debe tener presente que en estas groseras estimaciones de orden de magnitud ignoramos los efectos de la resistencia del aire y del viento. En un cálculo realístico estos efectos se deben tomar en cuenta.

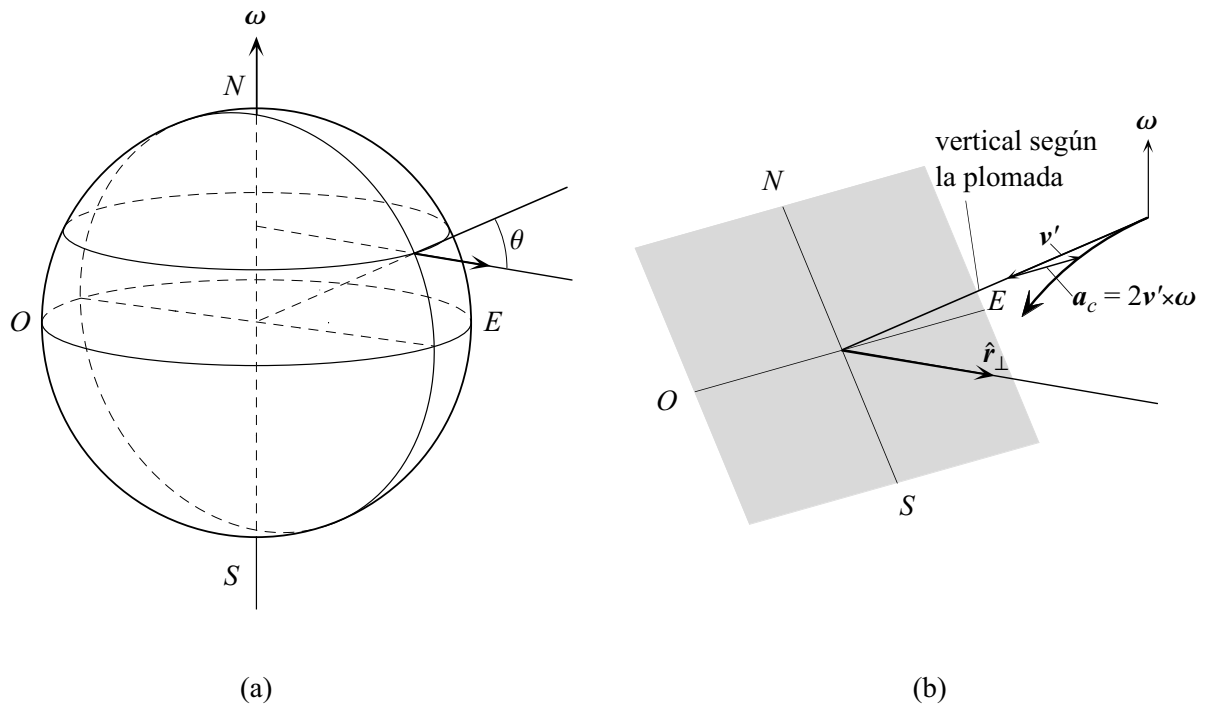


Fig. 3.25. Desviación hacia el Este en la caída libre.

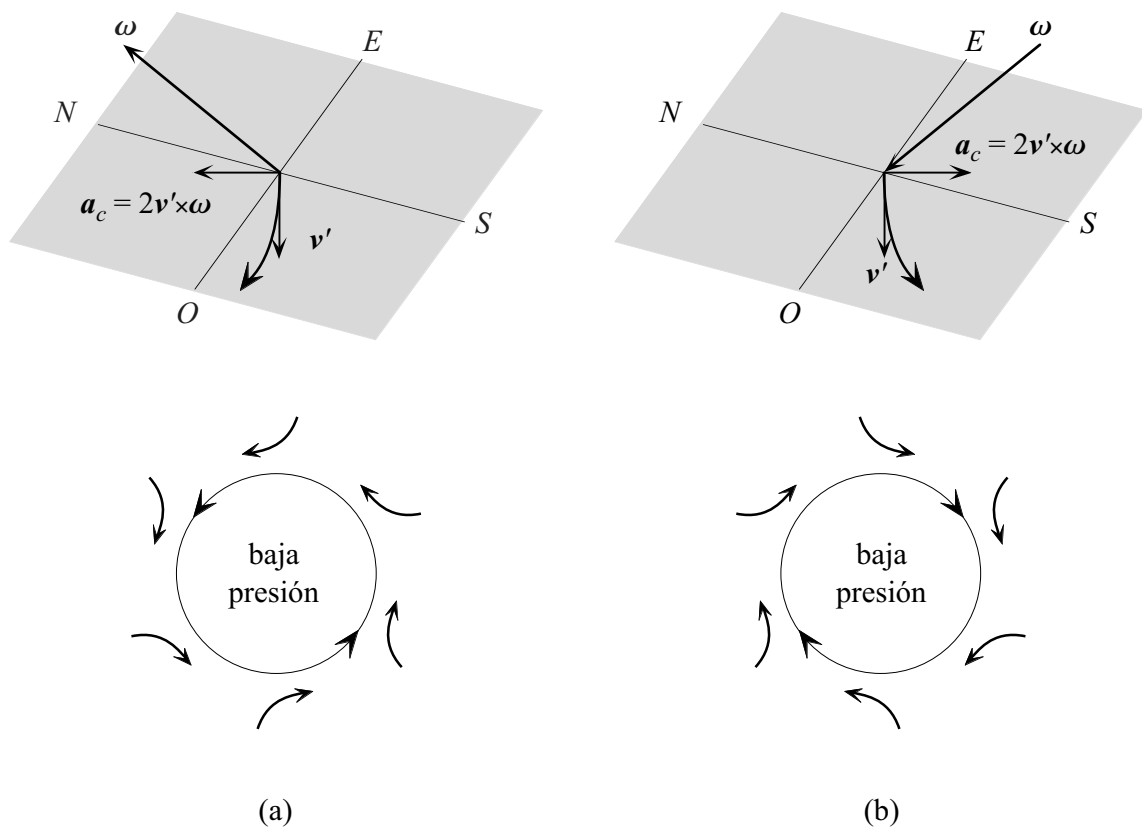


Fig. 3.26. Desviación de los movimientos horizontales por efecto de la aceleración de Coriolis: (a) en el hemisferio Norte se produce una desviación hacia la derecha y por ese motivo la circulación ciclónica tiene sentido antihorario, (b) en el hemisferio Sur la desviación es hacia la izquierda y la circulación ciclónica es horaria.